OKASCHE PAARE VON GARBEN HOMOGENER RÄUME

Sandra Hayes

1971

OKASCHE PAARE VON GARBEN HOMOGENER RÄUME

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von Sandra Hayes
September 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Professor Dr. Karl Stein
Korreferent: Professor Dr. Fritz Kasch
Tag der mündlichen Prüfung: 3.2.1971

INHALT

I. Einleitung 1

II. Vorbemerkungen 4
§ 1. Garben von Mengen 4
§ 2. Garben von homogenen Räumen 8
§ 3. Exakte Sequenzen von Mengen 11
§ 4. Exakte Sequenzen von Garben homogener Räume und die dadurch induzierten exakten Cohomologiesequenzen 17
§ 5. Exakte Homotopiesequenzen 23

III. Voraussetzungen, Formulierung und Beweis des Hauptsatzes 34
§ 6. Okasche Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen 34
§ 7. Okasche Paare von Garben homogener Räume 54
§ 8. Formulierung und Beweis des Hauptsatzes 58

IV. Folgerungen und Anwendungen des Hauptsatzes 68
§ 9. Grauertsche Homotopieaussage 70
§ 10. Okasches Prinzip für holomorphe Faserbündel mit homogener Faser 71
§ 11. Okasches Prinzip für holomorphe Faserbündel mit transitiv auf der Faser wirkender Strukturgruppe 83
§ 12. Transformationssatz für Erzeugendensysteme des Moduls der globalen Schnitte einer kohärenten Modulgarbe 87
§ 13. Okasches Prinzip für Endromisbündel 99
§ 14. Okasches Prinzip für Modulbasen 103

V. Literaturverzeichnis 105

I. Einleitung.

Im Jahre 1939 zeigte K. Oka [19], daß das zweite Cousin-Problem in Holomorphiegebieten genau dann holomorph lösbar ist, wenn eine stetige Lösung angegeben werden kann.

Ganz allgemein wird seither die Methode der Lösung holomorpher Probleme durch Zurückführung auf topologische Probleme Okasches Prinzip genannt.

In den 1957-58 erschienen Arbeiten [10, 11, 12] von H. Grauert und ihrer Darstellung durch H. Cartan [3] wurden holomorphe Faserbündel E über einem Steinschen Raum X mit einer komplexen Lieschen Gruppe als Faser untersucht. Grauert bewies, daß es eine natürliche Isomorphie zwischen den Homotopieklassen der globalen stetigen und holomorphen Schnitte von E gibt, d. h. die Inklusionsabbildung $\mathcal{E}_\omega \longrightarrow \mathcal{E}_c$, wobei $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, die Garbe der lokalen stetigen bzw. holomorphen Schnitte von E ist, induziert eine bijektive Abbildung

$$\Pi(X, \mathcal{E}_\omega) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_c) \quad .$$

Daraus lässt sich als Okasches Prinzip für solche Faserbündel E schließen: E besitzt genau dann einen holomorphen Schnitt, wenn es einen stetigen hat; zwei holomorphe Schnitte können genau dann durch holomorphe Schnitte ineinander deformiert werden, wenn sie durch stetige Schnitte ineinander deformierbar sind.

O. Forster und K. J. Ramspott zeigten 1966 in [6], daß auch geeignete Paare von Untergarben des Garbenpaares $(\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_\omega)$ die erwähnte Homotopieeigenschaft besitzen. Derartige Untergarben wurden Okasche Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen genannt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Definition eines Okaschen Paares von Garben homogener Räume gegeben. Diese Bezeichnung wurde gewählt, da ein solches Paar ein Paar von Garben topologischer Räume ist, auf dem u. a. ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen transitiv wirkt.

Mit Hilfe dieser Definition gelang eine Verallgemeinerung der Grauertschen Homotopieaussage. Während die Grauertsche Aussage auf Garben $\mathcal{E}_\alpha$ topologischer Gruppen beschränkt ist, erweitert der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit diese Aussage auf Garben topologischer Räume: für jedes Okasche Paar $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ von Garben homogener Räume über dem Steinschen Raum X gibt es eine durch h induzierte Isomorphie zwischen den Homotopieklassen der globalen Schnitte; dabei ist h eine mit den Wirkungsabbildungen verträgliche Garbenabbildung. Das bedeutet, daß die durch h induzierte Abbildung

$$\Pi(X, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_1)$$

bijektiv ist.

Als zusätzliche Verallgemeinerung wird die komplexe Liesche Gruppe als Faser des Faserbündels E durch eine homogene Faser ersetzt und für solche Faserbündel ein Okasches Prinzip aus dem Hauptsatz abgeleitet.

Neben diesem Okaschen Prinzip lassen sich aus dem Hauptsatz bekannte Einzelresultate zum Okaschen Prinzip, nämlich das Okasche Prinzip für Endromisbündel [7], das für Modulbasen [8], sowie der Hauptsatz aus der Arbeit [20], schließen, wodurch eine Vereinheitlichung gegeben ist.

Als weitere Anwendung wird eine verallgemeinerte Fassung eines von H. Cartan [2] im Jahre 1940 aufgeworfenen Transformationsproblems gelöst. Es werden notwendige und hinreichende topologische Bedingungen angegeben, um zwei Erzeugendensysteme der Länge r bzw. s des Moduls der globalen Schnitte einer kohärenten $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ über dem Steinschen Raum $(X, \mathcal{O})$ ineinander durch eine holomorphe Matrix maximalen Ranges zu transformieren. Der in [8] auf andere Weise bewiesene Transformationssatz für Erzeugendensysteme gleicher Länge, also $r = s$, ist als vereinfachter Spezialfall in diesem Satz enthalten.

Der Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit stützt sich auf die in den ersten sechs Paragraphen neu entwickelten allgemeinen Aussagen über exakte Sequenzen von Mengen und die durch exakte Sequenzen von Garben homogener Räume induzierten exakten Homotopiesequenzen sowie einige neue Resultate über Okasche Paare von Garben nichtabelscher Gruppen; dabei greift er auch Anregungen von O. Forster und K. J. Ramspott in [7] auf.

Herrn Professor Dr. K. Stein danke ich für seine Unterstützung, den Herrn Professoren Dr. O. Forster und Dr. K. J. Ramspott für die Anregungen und Hinweise, die sie mir in verschiedenen Gesprächen gaben.

II. Vorbemerkungen.

In den ersten beiden Paragraphen dieses Kapitels werden die für diese Arbeit grundlegenden Definitionen sowie bekannte Eigenschaften der Garben von Mengen und Garben von homogenen Räumen zusammengefaßt.

Die folgenden drei Paragraphen bringen allgemeine Aussagen über Sequenzen von Mengen (Satz 1) und Sequenzen, die durch Garben von homogenen Räumen induziert werden (Sätze 2 - 4). Diese Aussagen, die bisher nur für spezielle Fälle formuliert waren, werden für den im Kapitel III angegebenen Beweis des Hauptsatzes herangezogen.

§ 1. Garben von Mengen.

Definition 1.

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{T}$ sei die Menge aller offenen Teilmengen von X. Eine Prägarbe von Mengen über X ist ein Paar

$$\mathcal{E} = ((\mathcal{E}(U))_{U\in\mathcal{T}}, (r_V^U)_{V\subset U\in\mathcal{T}}) \quad ,$$

bestehend aus einer Familie $(\mathcal{E}(U))_{U\in\mathcal{T}}$ von Mengen $\mathcal{E}(U)$ und einer Familie $(r_V^U)_{V\subset U}$ von Abbildungen $r_V^U\colon \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(V)$, die für alle $U,V\in\mathcal{T}$ mit $V\subset U$ definiert sind und folgende Eigenschaften haben:

a) $r_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{E}(U)}$ für alle $U\in\mathcal{T}$

b) $r_W^U = r_W^V \cdot r_V^U$ für alle $U,V,W\in\mathcal{T}$ mit $W\subset V\subset U$.

Die Abbildungen r_V^U heißen Beschränkungsabbildungen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird $r_V^U(f)$ mit $f|V$ abgekürzt, wobei $f \in \mathcal{E}(U)$ und $V \subset U$ offen in X sind.

Definition 2.

Eine Prägarbe $\mathcal{E}$ von Mengen über dem topologischen Raum X heißt Garbe von Mengen über X, wenn die beiden folgenden Axiome für eine beliebige Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X erfüllt sind.

(G1) Sind f und g zwei Elemente aus $\mathcal{E}(\bigcup_{i \in I} U_i)$ mit $f|U_i = g|U_i$ für alle $i \in I$, so gilt $f = g$.

(G2) Ist $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen $f_i \in \mathcal{E}(U_i)$ mit $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$ für alle $i,j \in I$, so existiert ein $f \in \mathcal{E}(\bigcup_{i \in I} U_i)$ mit $f|U_i = f_i$ für alle $i \in I$.

Die Menge $\mathcal{E}(U)$ wird auch mit $H^0(U, \mathcal{E})$ bezeichnet. Ihre Elemente heißen Schnitte von $\mathcal{E}$ über U. Der induktive Limes $\mathcal{E}_x := \lim\limits_{U \in \mathcal{U}(x)} \text{ind } \mathcal{E}(U)$ heißt der Halm von $\mathcal{E}$ im Punkt $x \in X$; dabei ist $\mathcal{U}(x)$ das System der offenen Umgebungen von x. Das Bild von $f \in \mathcal{E}(U)$ bei der kanonischen Projektion $\mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}_x$ heißt der Keim von f in x und wird mit f_x bezeichnet.

Für jede offene Teilmenge U von X, die mit einer durch die Topologie auf X induzierten Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ versehen ist, definiert $\mathcal{E}$ eine Garbe

$$\mathcal{E}|U := ((\mathcal{E}(V))_{V \in \tilde{\mathcal{T}}}, (r_W^U)_{W \subset V \in \tilde{\mathcal{T}}}) \quad ,$$

die als die Beschränkungsgarbe von $\mathcal{E}$ auf U bezeichnet wird.

Besitzen die Schnittmengen $\mathcal{E}(U)$ eine Topologie oder eine Gruppenstruktur, wobei die Beschränkungsabbildungen stetig bzw. Gruppenhomomorphismen sind, so heißt $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Räumen bzw. von Gruppen. Ist $\mathcal{E}$ eine Garbe von Gruppen, dann heißen r_V^U Beschränkungshomomorphismen; der Halm $\mathcal{E}_x$ ist eine Gruppe. Wenn $\mathcal{E}(U)$ topologische Gruppen und r_V^U stetige Gruppenhomomorphismen sind, ist $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Gruppen.

Eine Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ zwischen den Garben $\mathcal{E}_i = ((\mathcal{E}_i(U)),(r_{i,V}^U))$ von Mengen über dem topologischen Raum (X, τ) ist eine Familie $h = (h_U)_{U\in\tau}$ von Abbildungen $h_U: \mathcal{E}_2(U) \longrightarrow \mathcal{E}_1(U)$, so daß für alle $V,U\in\tau$ mit $V\subset U$ gilt: $r_{1,V}^U \circ h_U = h_V \circ r_{2,V}^U$, d. h. die Abbildungen h_U sind mit den Beschränkungsabbildungen verträglich.

Falls $\mathcal{E}_i$ Garben von topologischen Räumen oder (topologischen) Gruppen sind, verlangt man zusätzlich von einer Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$, daß h_U stetig bzw. ein (stetiger) Homomorphismus für alle $U\in\tau$ sein muß. Zur Betonung wird oft h eine stetige Garbenabbildung bzw. ein (stetiger) Garbenhomomorphismus genannt.

Die Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ induziert in natürlicher Weise für jedes $U\in\tau$ eine Garbenabbildung $h|U: \mathcal{E}_2|U \longrightarrow \mathcal{E}_1|U$. Ist h stetig oder ein Garbenhomomorphismus, so gilt das auch für $h|U$.

Für jedes $x \in X$ wird durch h genau eine Abbildung $h_x: \mathcal{E}_{2,x} \longrightarrow \mathcal{E}_{1,x}$ der Halme induziert, für die $h_x(f_x) = (h_U(f))_x$ für alle U aus $\mathcal{U}(x)$ und $f \in \mathcal{E}_2(U)$ ist. Ist h_x für jedes $x \in X$ injektiv oder surjektiv, so heißt h eine injektive bzw. surjektive Garbenabbildung. Für Prägarbenabbildungen, die wie Garbenabbildungen definiert sind, gilt: die Prägarbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ ist injektiv bzw. surjektiv genau dann, wenn h_U injektiv bzw. surjektiv für alle $U \in \mathcal{T}$ ist.

Im folgenden wird die Čechsche Cohomologietheorie benutzt (siehe [9, § 3], [16, § 3] und [6, § 1]). Danach gibt es für jede Garbe $\mathcal{K}$ von Gruppen über X eine erste Cohomologiemenge $H^1(X,\mathcal{K})$ von X mit Werten in $\mathcal{K}$, die ein ausgezeichnetes - durch die Einsschnitte von $\mathcal{K}$ gegebenes - Element besitzt. Jeder Garbenhomomorphismus $k: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ zwischen den Garben $\mathcal{K}_i$ von Gruppen über X induziert in natürlicher Weise eine Abbildung $k_*: H^1(X, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_1)$, die das ausgezeichnete Element in das ausgezeichnete Element überführt.

§ 2. Garben von homogenen Räumen.

In diesem Paragraphen wird der Begriff des homogenen Raumes auf Garben übertragen. Zugrunde liegen die Gedankengänge von Frenkel [9, § 2], die hier auf den Lerayschen Garbenbegriff angewendet werden.

Eine Gruppe G wirkt auf einer Menge M durch eine Abbildung $\cdot: G \times M \longrightarrow M$, $(g,m) \longmapsto g \cdot m$, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$ gilt: $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$, $e \cdot m = m$; dabei ist e das Einselement in G. Diese Abbildung heißt "Wirkungsabbildung". Jedem Element $m \in M$ kann eine Untergruppe $G_m := \{ g \in G: \; g \cdot m = m \}$ von G zugeordnet werden, die Isotropiegruppe von m in G genannt wird.

G wirkt transitiv auf der nicht leeren Menge M durch die Wirkungsabbildung „$\cdot$", wenn es zu jedem Paar $m_1, m_2 \in M$ ein Element $g \in G$ mit $g \cdot m_1 = m_2$ gibt. In diesem Fall heißt das Tripel $(M,G,\cdot)$ ein homogener Raum.

Von einer Wirkungsabbildung $\cdot: G \times M \longrightarrow M$ wird verlangt, daß sie stetig bzw. holomorph ist, wenn G und M eine Topologie bzw. eine komplexe Struktur haben.

Es sei G_i eine Gruppe, die auf der Menge M_i mittels der Wirkungsabbildung $\cdot: G_i \times M_i \longrightarrow M_i$ wirkt, i=1,2. Die Abbildungen $\tau: G_2 \longrightarrow G_1$ und $\mu: M_2 \longrightarrow M_1$ sind mit diesen Wirkungsabbildungen verträglich, wenn $\mu(g \cdot m) = \tau(g) \cdot \mu(m)$ für alle $g \in G_2, m \in M_2$ gilt.

Übertragung des Begriffs "Wirkung" auf Garben (vgl. [9, § 2]):

Definition 3.

Eine Garbe $\mathcal{K}$ von Gruppen über dem topologischen Raum X wirkt auf einer Garbe $\mathcal{E}$ von Mengen über X durch eine Garbenabbildung $w: \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, wenn für alle offenen Teilmengen U von X die Gruppe $\mathcal{K}(U)$ auf der Menge $\mathcal{E}(U)$ mittels der Abbildung $w_U: \mathcal{K}(U) \times \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ wirkt; w heißt die "Wirkungsabbildung".

Es sei angemerkt, daß dann der Halm $\mathcal{K}_x$ auf dem Halm $\mathcal{E}_x$ durch die Abbildung $w_x: \mathcal{K}_x \times \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}_x$ wirkt. Wird w_U für jedes U multiplikativ geschrieben, so sei die Abbildung w mit „$\cdot$" bezeichnet.

Ist $\mathcal{K}$ eine Garbe von topologischen Gruppen und $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Räumen, so muß zusätzlich die Wirkungsabbildung $w: \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ eine stetige Garbenabbildung sein.

Definition 4.

Eine Garbe homogener Räume über dem topologischen Raum X ist ein Tripel $(\mathcal{E},\mathcal{K},w)$, bestehend aus einer Garbe $\mathcal{E}$ von Mengen über X, einer Garbe $\mathcal{K}$ von Gruppen über X und einer Wirkungsabbildung $w: \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in X$ ist $(\mathcal{E}_x,\mathcal{K}_x,w_x)$ ein homogener Raum.

Ist $(\mathcal{E},\mathcal{K},w)$ eine Garbe homogener Räume, so sei $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{E}$ durch w transitiv wirkend genannt. Man beachte, daß der Halm $\mathcal{E}_x$ für jedes $x \in X$ nicht leer ist, und daß die Gruppe $\mathcal{K}(U)$ nicht notwendigerweise transitiv auf der Menge $\mathcal{E}(U)$ wirkt. Für jede offene Teilmenge U von X ist $(\mathcal{E}|U,\mathcal{K}|U,w|U)$ auch eine Garbe homogener Räume.

Definition 5.

Es sei $\mathcal{K}$ eine Garbe von Gruppen über dem topologischen Raum X, die auf einer Garbe $\mathcal{E}$ von Mengen über X durch die Garbenabbildung $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ wirkt. Ferner sei ein Schnitt f von $\mathcal{E}$ über X gegeben. Die Garbe $\mathcal{K}^f$, definiert durch

$$\mathcal{K}^f(U) := \{ M \in \mathcal{K}(U) : \; M \cdot f = f \text{ über } U \}$$

für alle offenen Teilmengen U in X, heißt die Isotropiegarbe von f in $\mathcal{K}$.

Die Isotropiegarbe $\mathcal{K}^f$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{K}$. Ist $\mathcal{K}$ eine Garbe von topologischen Gruppen, dann seien die Schnittgruppen $\mathcal{K}^f(U)$ mit der durch $\mathcal{K}(U)$ induzierten Topologie versehen. Damit wird $\mathcal{K}^f$ eine Garbe von topologischen Gruppen.

Es sei $\mathcal{K}_i$ eine Garbe von Gruppen, die auf einer Garbe $\mathcal{E}_i$ von Mengen durch $\cdot : \mathcal{K}_i \times \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i$ wirkt, i=1,2. Die Garbenabbildungen $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ und $k: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ heißen mit diesen Wirkungsabbildungen verträglich, falls $h_U(M \cdot g) = k_U(M) \cdot h_U(g)$ für alle offenen Teilmengen U von X und beliebige $M \in \mathcal{K}_2(U)$ und $g \in \mathcal{E}_2(U)$ ist. Jeder Schnitt $f \in \mathcal{E}_2(X)$ induziert auf Grund der Verträglichkeitsbedingung eine Garbenabbildung

$$k^f : \mathcal{K}_2^f \longrightarrow \mathcal{K}_1^{f_1} , \quad f_1 := h_X(f) \quad ,$$

definiert durch $k_U^f := k_U | \mathcal{K}_2^f(U)$.

§ 3. Exakte Sequenzen von Mengen.

In diesem Paragraphen wird ein Satz bewiesen, der hinreichende Bedingungen für die Exaktheit einer Sequenz von Mengen angibt.

Eine Sequenz

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3} A_4 \xrightarrow{\alpha_4} A_5$$

von Mengen A_i, wobei die letzten drei Mengen ausgezeichnete Elemente e_i besitzen, und Abbildungen α_i heißt exakt, wenn folgendes gilt:

(E1) $\quad \mathrm{Im}(\alpha_i) = \mathrm{Ker}\,(\alpha_{i+1}) := \alpha_{i+1}^{-1}(e_{i+2}),\ i = 1,2,3$

Falls $A_1 = 1$ und $A_5 = 1$ sind, so muß nur A_4 ein ausgezeichnetes Element haben. Dann bedeutet die Exaktheit an der ersten bzw. dritten Stelle, daß α_2 injektiv bzw. α_3 surjektiv ist.

Ist $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ eine Abbildung derart, daß eine Abbildung $\cdot : A_2 \times A_3 \longrightarrow A_3$ existiert mit $\alpha_2(a) = a \cdot e_3$ für alle $a \in A_2$, dann heißt die Sequenz

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3} A_4 \xrightarrow{\alpha_4} A_5$$

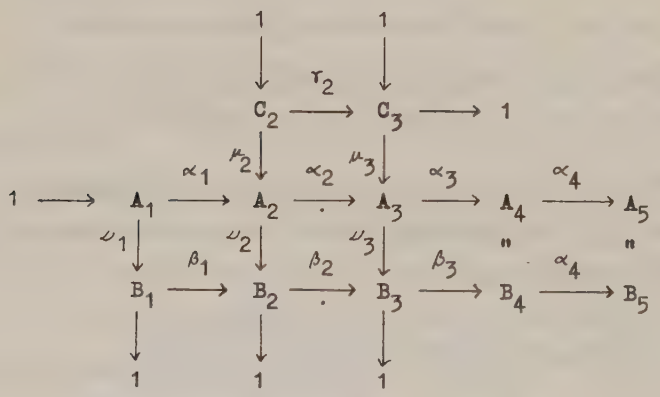
exakt (vgl. [7, §3]), wenn neben der Exaktheitsbedingung (E1) auch die folgende Bedingung erfüllt ist:

(E2) Für zwei Elemente $a', a'' \in A_3$ gilt $\alpha_3(a') = \alpha_3(a'')$ genau dann, wenn ein $a \in A_2$ mit $a \cdot a' = a''$ existiert.

A_2, B_2 und C_2 seien Gruppen und A_1, A_3, B_i (i=1,3,4,5) und C_3 Mengen, wobei A_3 und B_i ausgezeichnete Elemente e_3 bzw. e_i' für i = 3,4,5 besitzen. Das ausgezeichnete Element von A_2 bzw. B_2 sei das Einselement e_2 bzw. e_2'. A_2 wirke auf A_3 und B_2 auf B_3 durch die Abbildungen $\cdot: A_2 \times A_3 \longrightarrow A_3$ bzw. $\cdot: B_2 \times B_3 \longrightarrow B_3$; außerdem seien die Abbildungen $\alpha_2: A_2 \longrightarrow A_3$ und $\beta_2: B_2 \longrightarrow B_3$ durch $\alpha_2(a) := a \cdot e_3$ und $\beta_2(b) := b \cdot e_3'$ für alle $a \in A_2$, $b \in B_2$ gegeben. Dann gilt:

Satz 1.

Es seien Abbildungen gegeben, die das Diagramm



kommutativ machen. Alle Spalten sowie die 1. und 2. Zeile von oben seien exakt. Für i = 2,3 führen die Abbildungen ν_i das Element e_i in e_i' über; außerdem seien sie mit den Wirkungsabbildungen verträglich. Die Abbildungen μ_2 und ν_2 seien Gruppenhomomorphismen. Unter diesen Bedingungen ist die letzte Zeile von oben exakt.

Beweis: 1) Im β_1 = Ker β_2.

Es sei $b_i \in B_i$, i = 1,2, mit $\beta_1(b_1) = b_2$, d. h. es sei $b_2 \in$ Im β_1. Da ν_1 surjektiv ist, gibt es ein $a_1 \in A_1$ mit $\nu_1(a_1) = b_1$, also ist wegen der Kommunitativität des Diagramms $b_2 = \nu_2(\alpha_1(a_1))$, daher ist auch $\beta_2(b_2) = \nu_3(\alpha_2(\alpha_1(a_1)))$. Wegen der Exaktheit der zweiten Zeile von oben ist Im $\alpha_1 \subset$ Ker α_2, woraus $\alpha_2(\alpha_1(a_1)) = e_3$ und damit $\beta_2(b_2) = e_3'$, weil $\nu_3(e_3) = e_3'$ ist, folgen. Das bedeutet, daß Im $\beta_1 \subset$ Ker β_2 ist.

Es sei $b_2 \in B_2$ mit $\beta_2(b_2) = e_3'$, also $b_2 \in$ Ker β_2. Da ν_2 surjektiv ist, gibt es ein $a_2 \in A_2$ mit $\nu_2(a_2) = b_2$. Es ist nach Voraussetzung $\beta_2(b_2) = b_2 \cdot e_3'$; daher folgt wegen $\nu_3(e_3) = e_3'$ und der Verträglichkeitsbedingung $\nu_3(a_2 \cdot e_3) = \nu_2(a_2) \cdot \nu_3(e_3) = b_2 \cdot e_3' = e_3'$, woraus sich $a_2 \cdot e_3 \in$ Ker μ_3 ergibt. Wegen Ker $\mu_3 \subset$ Im μ_3 gibt es ein $c_3 \in C_3$ mit $\mu_3(c_3) = a_2 \cdot e_3$. Weil τ_2 surjektiv ist, existiert ein $c_2 \in C_2$ mit $\tau_2(c_2) = c_3$.

Es sei $a_2' := (\mu_2(c_2))^{-1} a_2$. Es ist $a_2' \in A_2$, da A_2 eine Gruppe ist. Nun ist μ_2 ein Gruppenhomomorphismus und es ist Im $\mu_2 \subset$ Ker ν_2, daher gilt $\nu_2((\mu_2(c_2))^{-1}) = \nu_2(\mu_2(c_2^{-1})) = e_2'$ und, weil B_2 eine Gruppe, ν_2 ein Homomorphismus, und $\nu_2(a_2) = b_2$ sind, auch

(+) $$\nu_2(a_2') = b_2$$

Außerdem ist $a_2' \in \operatorname{Ker} \alpha_2$, da $\alpha_2(a_2') = a_2' \cdot e_3$

$= (\mu_2(c_2^{-1})a_2) \cdot e_3 = \mu_2(c_2^{-1}) \cdot (a_2 \cdot e_3) = \mu_2(c_2^{-1}) \cdot \mu_3(c_3)$

$= \mu_2(c_2^{-1}) \cdot \mu_3(\tau_2(c_2)) = \mu_2(c_2^{-1}) \cdot \alpha_2(\mu_2(c_2))$

$= \mu_2(c_2^{-1}) \cdot (\mu_2(c_2) \cdot e_3) = (\mu_2(c_2^{-1})\, \mu_2(c_2)) \cdot e_3$

$= e_2 \cdot e_3 = e_3$. Wegen $\operatorname{Ker} \alpha_2 \subset \operatorname{Im} \alpha_1$ gibt es ein $a_1 \in A_1$ mit $\alpha_1(a_1) = a_2'$.

Sei $b_1 := \nu_1(a_1)$. Wegen der Kommutativität des Diagramms und der Gleichung (+) ist

$\beta_1(b_1) = \beta_1(\nu_1(a_1)) = \nu_2(\alpha_1(a_1)) = \nu_2(a_2') = b_2$,

d. h. $b_2 \in \operatorname{Im} \beta_1$, womit $\operatorname{Ker} \beta_2 \subset \operatorname{Im} \beta_1$ und damit $\operatorname{Ker} \beta_2 = \operatorname{Im} \beta$ folgen.

2) $\operatorname{Im} \beta_2 = \operatorname{Ker} \beta_3$.

Es ist $\operatorname{Im} \beta_2 = \operatorname{Im}(\beta_2 \circ \nu_2) = \operatorname{Im}(\nu_3 \circ \alpha_2) = \nu_3(\alpha_2(A_2))$ wegen der Surjektivität von ν_2 und der Kommutativität des Diagramms. Da $\beta_3 \circ \nu_3 = \alpha_3$ ist und $\alpha_2(A_2) = \operatorname{Ker} \alpha_3$ ist, folgt $\operatorname{Im} \beta_2 \subset \operatorname{Ker} \beta_3$.

Sei $b_3 \in B_3$ mit $\beta_3(b_3) = e_4'$. Da ν_3 surjektiv ist, gibt es ein $a_3 \in A_3$ mit $\nu_3(a_3) = b_3$. Aus $\beta_3(\nu_3(a_3)) = \alpha_3(a_3) = e_4'$ folgt $a_3 \in \operatorname{Ker} \alpha_3$. Es ist $\operatorname{Ker} \alpha_3 \subset \operatorname{Im} \alpha_2$, also gibt es ein $a_2 \in A_2$ mit $\alpha_2(a_2) = a_3$. Für $b_2 := \nu_2(a_2)$ ist $\beta_2(b_2) = b_3$, d. h. $\operatorname{Ker} \beta_3 \subset \operatorname{Im} \beta_2$.

3) $\mathrm{Im}\,\beta_3 = \mathrm{Ker}\,\alpha_4$.

Weil ν_3 surjektiv ist, gilt $\mathrm{Im}\,\beta_3 = \mathrm{Im}(\beta_3 \circ \alpha_3)$. Aus der Kommutativität des Diagramms und der Exaktheit der zweiten Zeile von oben folgen $\beta_3 \circ \nu_3 = \alpha_3$ und $\mathrm{Im}\,\alpha_3 = \mathrm{Ker}\,\alpha_4$, also ist $\mathrm{Im}\,\beta_3 = \mathrm{Ker}\,\alpha_4$.

4) Nachweis der Exaktheitsbedingung (E2).

Es seien b' und b" beliebige Elemente aus B_3. Da ν_3 surjektiv ist, gibt es Elemente a', a" $\in A_3$ mit $\nu_3(a') = b'$, $\nu_3(a") = b"$. Wegen der Kommutativität ist $\beta_3 \circ \nu_3 = \alpha_3$, also gilt $\beta_3(b') = \beta_3(b")$ genau dann, wenn $\alpha_3(a') = \alpha_3(a")$ ist. Diese Gleichung ist gültig dann und nur dann, wenn es ein Element $a \in A_2$ mit $a \cdot a' = a"$ gibt, da die Exaktheitsbedingung (E2) für die mittlere Zeile erfüllt ist. Auf Grund dieser Tatsache wird gezeigt: Es gilt $\alpha_3(a') = \alpha_3(a")$ genau dann, wenn es ein $b \in B_2$ gibt mit $b \cdot b' = b"$. Daraus folgt die Bedingung (E2) für die letzte Zeile des Diagramms.

Es sei $b \in B_2$ mit $b \cdot b' = b"$. Dann ist $\beta_3(b") = \beta_3(\nu_3(a")) = \alpha_3(a")$. Da ν_2 surjektiv ist, gibt es ein $a \in A_2$ mit $\nu_2(a) = b$. Wegen der Verträglichkeitsbedingung ist $\beta_3(b \cdot b') = \beta_3(\nu_2(a) \cdot \nu_3(a')) = \beta_3(\nu_3(a \cdot a')) = \alpha_3(a \cdot a')$, also ist $\alpha_3(a \cdot a') = \alpha_3(a")$, woraus die Existenz eines Elements $\tilde{a} \in A_2$ mit $\tilde{a} \cdot a" = a \cdot a'$ folgt. Mit Hilfe einer Eigenschaft der Wirkungsabbildung ist dann $a" = (\tilde{a}^{-1}a) \cdot a'$, und daher ist $\alpha_3(a") = \alpha_3(a')$.

Es sei umgekehrt $\alpha_3(a') = \alpha_3(a")$. Dann gibt es ein $a \in A_2$ mit $a \cdot a' = a"$. Für $b := \nu_2(a)$ folgt $b \cdot b' = \nu_2(a) \cdot \nu_3(a') = \nu_3(a \cdot a') = \nu_3(a") = b"$.

q. e. d.

Dieser Hilfssatz wurde bereits in zwei Spezialfällen [7, § 3, Hilfssatz 9] und [8, § 3, Hilfssatz 4] benutzt.

Eine Aussage, die in [7, Hilfssatz 8] bewiesen wurde und die als Hilfsmittel zum Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit dient, wird vollständigkeitshalber hier angegeben: Es seien A_i und B_i, i=1,2,3,4,5, Mengen mit ausgezeichneten Elementen e_i bzw. e_i' für i=3,4,5. Ferner seien Abbildungen $\cdot: A_2 \times A_3 \longrightarrow A_3$ und $\cdot: B_2 \times B_3 \longrightarrow B_3$ gegeben, die Abbildungen $\alpha_2: A_2 \longrightarrow A_3$ und $\beta_2: B_2 \longrightarrow B_3$ durch $\alpha_2(a_2) := a_2 \cdot e_3$ bzw. $\beta_2(b_2) := b_2 \cdot e_3'$ für alle $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$ induzieren.

FÜNFER-LEMMA.

Es seien Abbildungen gegeben, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_1} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_3} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_4} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

kommunitativ ist und die Zeilen exakt sind.
Für i = 3,4,5 führen die Abbildungen ν_i das Element e_i in e_i' über; ν_2 und ν_3 seien mit den Abbildungen „$\cdot$" verträglich. Dann gilt:

1) Sind ν_2 und ν_4 surjektiv und gilt $\mathrm{Ker}(\nu_5) = \{e_5\}$, so ist ν_3 surjektiv.

2) Sind ν_1 surjektiv, ν_2 injektiv und $\mathrm{Ker}(\nu_4) = \{e_4\}$, so ist $\mathrm{Ker}(\nu_3) = \{e_3\}$.

§ 4. Exakte Sequenzen von Garben homogener Räume und die dadurch induzierten exakten Cohomologiesequenzen.

In diesem Paragraphen werden zwei Sätze von Frenkel [9, § 5] angegeben, die besagen, daß eine Garbe von homogenen Räumen eine exakte Cohomologiesequenz induziert und daß die Cohomologiesequenzen, gegeben durch zwei verträgliche Garben von homogenen Räumen, ein kommutatives Diagramm bilden.

Eine Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{h_1} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{h_2} \mathcal{E}_3 \longrightarrow 1$$

der Garben $\mathcal{E}_i$ von Mengen über dem topologischen Raum X, wobei $\mathcal{E}_3$ einen ausgezeichneten Schnitt f über X besitzt, und der Garbenabbildungen h_i heißt exakt, wenn für alle $x \in X$ die Halme $\mathcal{E}_{i,x}$ und die Abbildungen $h_{i,x}$ eine exakte Sequenz von Mengen

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_{1,x} \xrightarrow{h_{1,x}} \mathcal{E}_{2,x} \xrightarrow{h_{2,x}} \mathcal{E}_{3,x} \longrightarrow 1$$

bilden. Dabei ist der Keim von f im Punkte x das ausgezeichnete Element von $\mathcal{E}_{3,x}$. Die Exaktheit an der ersten und dritten Stelle ist gleichbedeutend damit, daß h_1 eine injektive bzw. h_2 eine surjektive Garbenabbildung ist.

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{K}, \cdot)$ eine Garbe von homogenen Räumen über dem topologischen Raum X. Ein Schnitt f von $\mathcal{E}$ über X sei gegeben und $\psi_f: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ sei eine durch $M \longmapsto M \cdot f$ definierte Garbenabbildung. Die Isotropiegarbe $\mathcal{K}^f$ von f in $\mathcal{K}$ sei mittels der Inklusionsabbildung i in $\mathcal{K}$ abgebildet. In den folgenden Sequenzen sei f der ausgezeichnete Schnitt.

Hilfssatz 1.

Die exakte Garbensequenz

$$(G) \qquad 1 \longrightarrow \mathcal{K}^f \xrightarrow{i} \mathcal{K} \xrightarrow{\psi_f} \mathcal{E} \longrightarrow 1$$

induziert eine exakte Cohomologiesequenz

$$(C)\ 1 \to H^0(X,\mathcal{K}^f) \xrightarrow{i_X} H^0(X,\mathcal{K}) \xrightarrow{\psi_{f,X}} H^0(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathcal{K}^f) \xrightarrow{i_*} H^1(X,\mathcal{K})$$

Beweis: 1) Definition der Abbildung $\delta : H^0(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}^f)$. Es sei $g \in \mathcal{E}(X)$. Da $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{E}$ transitiv wirkt, gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X, derart, daß es zu jedem $i \in I$ einen Schnitt $M_i \in \mathcal{K}(U_i)$ mit $M_i \cdot f = g$ über U_i gibt. Weil $N_{ij} := M_i^{-1} M_j$ ein Element der Gruppe $\mathcal{K}^f(U_{ij})$ für $U_{ij} := U_i \cap U_j$ ist, definiert $N := (N_{ij})_{i,j \in I}$ einen $\mathfrak{U}$-Cozyklus mit Werten in $\mathcal{K}^f$. Das durch N repräsentierte Element aus $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{K}^f)$ sei mit $\delta_{\mathfrak{U}}(g)$ bezeichnet.

Im folgenden wird nachgewiesen, daß $\delta_{\mathfrak{U}}(g)$ unabhängig von der Auswahl der Schnitte M_i ist. Dazu sei $(\tilde{M}_i)_{i \in I}$ eine andere Familie von Schnitten $\tilde{M}_i \in \mathcal{K}(U_i)$ mit $\tilde{M}_i \cdot f = g$ über U_i. Es ist $\tilde{N} := (\tilde{N}_{ij})_{i,j \in I}$, wobei $\tilde{N}_{ij} := \tilde{M}_i^{-1} \tilde{M}_j$ ist, der induzierte $\mathfrak{U}$-Cozyklus. N und $\tilde{N}$ sind cohomolog, denn mit $\hat{M}_i := M_i^{-1} \tilde{M}_i$ für jedes $i \in I$ ist $\hat{M}_i \in \mathcal{K}^f(U_i)$ und es gilt

$$\tilde{N}_{ij} = \hat{M}_i^{-1} N_{ij} \hat{M}_j \quad \text{über} \quad U_{ij} \,.$$

Daher wird das Element $\delta_{\mathfrak{U}}(g) \in H^1(\mathfrak{U},\mathcal{K}^f)$ auch durch $\tilde{N}$ repräsentiert, d. h. $\delta_{\mathfrak{U}}(g)$ hängt ausschließlich von $\mathfrak{U}$ und g ab.

Die Abbildung $\delta\colon H^0(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}^f)$ ordne jedem Schnitt $g \in \mathcal{E}(X)$ die Äquivalenzklasse von $\delta_{\mathcal{U}}(g)$ in $H^1(X,\mathcal{K}^f)$ zu. Sie ist wohldefiniert, weil diese Zuordnung unabhängig von der Wahl der Überdeckung $\mathcal{U}$ ist, wie man leicht nachweisen kann.

2) Die Cohomologiesequenz (C) ist exakt.
Um die Exaktheit an der dritten Stelle nachzuweisen, wird zunächst die Gültigkeit der Exaktheitsbedingung (E2) gezeigt. Es seien Schnitte g,g' aus $\mathcal{E}(X)$ derart gegeben, daß ein Schnitt $M \in \mathcal{K}(X)$ mit $M \cdot g' = g$ existiert. Zu zeigen ist: $\delta(g) = \delta(g')$.

Es sei $\delta_{\mathcal{U}}(g)$ ein Repräsentant von $\delta(g)$, wobei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit einer zugeordneten Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Schnitten $M_i \in \mathcal{K}(U_i)$ mit $M_i \cdot f = g$ ist. Dann ist $\delta_{\mathcal{U}}(g)$ die Äquivalenzklasse von dem Cozyklus $N = (N_{ij})_{i,j \in I}, N_{ij} := M_i^{-1} M_j$. Für jedes $i \in I$ sei

$$M_i' := M^{-1} M_i \text{ über } U_i \quad ,$$

woraus $M_i' \cdot f = g'$ für alle i und daher die Repräsentation von $\delta(g')$ durch $\delta_{\mathcal{U}}(g')$, wobei $\delta_{\mathcal{U}}(g')$ durch den Cozyklus $N' := (N_{ij}')_{i,j \in I}$, $N_{ij}' := (M_i')^{-1} M_j'$ gegeben wird, folgt. Wegen

$$N_{ij}' = N_{ij}$$

für alle $i,j \in I$ ist $\delta(g) = \delta(g')$.

Umgekehrt seien Schnitte g,g' aus $\mathcal{E}(X)$ mit $\delta(g) = \delta(g')$ vorgegeben. Es ist die Existence eines $M \in \mathcal{K}(X)$ mit $M \cdot g' = g$ nachzuweisen. Wegen $\delta(g) = \delta(g')$ kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ mit zugeordneten Familien $(M_i)_{i \in I}$ und $(M_i')_{i \in I}$ von Schnitten $M_i, M_i' \in \mathcal{K}(U_i)$, wobei $M_i \cdot f = g$ und $M_i' \cdot f = g'$ über U_i für alle $i \in I$ ist, gibt, so daß $\delta_{\mathcal{U}}(g) = \delta_{\mathcal{U}}(g')$ ist.

Da $\delta_{\mathcal{U}}(g)$ und $\delta_{\mathcal{U}}(g')$ durch die Cozyklen $N := (N_{ij})_{i,j \in I}$ bzw. $N' := (N'_{ij})_{i,j \in I}$, $N_{ij} := M_i^{-1} M_j$, $N'_{ij} := (M'_i)^{-1} M'_j$, repräsentiert werden, ist N cohomolog zu N'. Daher gibt es für jedes $i \in I$ ein $\tilde{M}_i \in \mathcal{K}^f(U_i)$ mit

$$(+) \qquad N'_{ij} = \tilde{M}_i^{-1} N_{ij} \tilde{M}_j \quad \text{über } U_{ij}$$

Es sei für alle i aus I

$$M''_i := M_i \tilde{M}_i (M'_i)^{-1}$$

Dann ist $M''_i \cdot g' = g$ über U_i. Die Gleichung (+) ergibt $M''_i = M''_j$ über U_{ij}, woraus nach dem Garbenaxiom (G2) für $\mathcal{K}$ die Existenz eines Schnittes $M'' \in \mathcal{K}(X)$ mit $M''|U_i = M''_i$ für jedes i folgt. Nach dem Axiom (G1) für $\mathcal{E}$ folgt dann $M'' \cdot g' = g$.

Daher gilt die Exaktheitsbedingung (E2) für die dritte Stelle der Sequenz (C). Für einen beliebigen Schnitt $g \in \mathcal{E}(X)$ ist also genau dann $\delta(g) = \delta(f)$, wenn es einen Schnitt $M \in \mathcal{K}(X)$ mit $g = M \cdot f$ gibt. Da $\delta(f)$ trivialerweise das ausgezeichnete Element von $H^1(X, \mathcal{K}^f)$ ist, gilt $\operatorname{Im} \Psi_{f,X} = \operatorname{Ker}\delta$, d.h. die Bedingung (E1) ist erfüllt, woraus die Exaktheit der Sequenz (C) an der dritten Stelle folgt.

Weil i die Inklusion ist, ist die Sequenz (C) an der vierten Stelle exakt: Denn nach der Definition von i_* ist für ein beliebiges Element $n \in H^1(X,\mathcal{K}^f)$ repräsentiert durch die Äquivalenzklasse eines $\mathcal{U}$-Cozyklus N mit Werten in $\mathcal{K}^f$, das Bild $i_*(n)$ in $H^1(X,\mathcal{K})$ auch repräsentiert durch N, wobei N als $\mathcal{U}$-Cozyklus mit Werten in $\mathcal{K}$ aufgefaßt ist.

Ist $i_*(n)$ gleich dem ausgezeichneten Element von $H^1(X,\mathcal{K})$, so ist N cohomolog dem $\mathcal{U}$-Cozyklus mit Werten in $\mathcal{K}$, der sich aus den

Einselementen der Schnittmengen von $\mathcal{K}$ ergibt. Falls $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ist und $N = (N_{ij})_{i,j \in I}$ ist, gibt es Schnitte $M_i \in \mathcal{K}(U_i)$ mit

$$N_{ij} = M_i^{-1} M_j \quad \text{über } U_{ij} \quad .$$

Wegen $N_{ij} \cdot f = f$ für alle $i,j \in I$ ist $M_i \cdot f = M_j \cdot f$ über U_{ij}. Aus dem Garbenaxiom (G2) für $\mathcal{E}$ folgt die Existenz eines Schnittes $g \in \mathcal{E}(X)$ mit $g = M_i \cdot f$ über U_i, woraus sich $\delta(g) = n$ ergibt. Daher ist $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \delta$. Da $\operatorname{Im} \delta \subset \operatorname{Ker} i_*$ trivialerweise gilt, ist die Sequenz (C) an der vierten Stelle exakt.

q. e. d.

Da die Abbildung δ für einige Ausführungen im nächsten Paragraphen grundlegend ist, wurde der Beweis nach Frenkel wiedergegeben.

Zur Formulierung des folgenden Hilfssatzes werden zwei Garben von homogenen Räumen $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot)$, i=1,2, über dem topologischen Raum X betrachtet. Eine Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ und ein Garbenhomomorphismus $k: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$, die mit den Wirkungsabbildungen „$\cdot$" verträglich sind, seien gegeben. Es sei $f = f_2$ ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ über X und $\Psi f_i: \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i$ sei die durch $M \longmapsto M \cdot f_i$ definierte Garbenabbildung, i=1,2, wobei $f_1 := h_X(f)$ ist. Die Inklusion der Isotropiegarbe $\mathcal{K}_i^{f_i}$ in $\mathcal{K}_i$ sei mit ι_i bezeichnet. Es sei $k^f: \mathcal{K}_2^f \longrightarrow \mathcal{K}_1^{f_1}$ wie in Paragraph 2.

Hilfssatz 2.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{K}_2^f & \xrightarrow{\iota_2} & \mathcal{K}_2 & \xrightarrow{\Psi_f} & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle k^f} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{K}_1^{f_1} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\Psi_{f_1}} & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

induziert das kommutative Diagramm

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \to & H^0(X, \mathfrak{K}_2^f) & \xrightarrow{\iota_{2,X}} & H^0(X, \mathfrak{K}_2) & \xrightarrow{\psi_{f,X}} & H^0(X, \mathcal{E}_2) & \xrightarrow{\delta_2} & H^1(X, \mathfrak{K}_2^f) & \xrightarrow{\iota_{2,*}} & H^1(X, \mathfrak{K}_2) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle k_X^f} & & \downarrow{\scriptstyle k_X} & & \downarrow{\scriptstyle h_X} & & \downarrow{\scriptstyle k_*^f} & & \downarrow{\scriptstyle k_*} \\
1 & \to & H^0(X, \mathfrak{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\iota_{1,X}} & H^0(X, \mathfrak{K}_1) & \xrightarrow{\psi_{f_1,X}} & H^0(X, \mathcal{E}_1) & \xrightarrow{\delta_1} & H^1(X, \mathfrak{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\iota_{1,*}} & H^1(X, \mathfrak{K}_1)
\end{array}
\tag{D}
$$

Auf den einfachen Beweis wird verzichtet.

§ 5. Exakte Homotopiesequenzen.

In diesem Paragraphen wird bewiesen, daß geeignete Garben von homogenen Räumen exakte Homotopiesequenzen induzieren. Dann wird gezeigt, daß Homotopiesequenzen, die durch zwei geeignete Garben von homogenen Räumen gegeben sind, ein kommutatives Diagramm bilden. Dabei heißt ein Tripel $(\mathcal{E}, \mathcal{K}, \cdot)$ in diesem Paragraphen eine Garbe von homogenen Räumen, wenn $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Räumen ist, auf der eine Garbe $\mathcal{K}$ von topologischen Gruppen durch die stetige Wirkungsabbildung $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ transitiv wirkt.

Zur Vorbereitung werden zunächst Begriffe zusammengestellt, die zum Beweis dieser Aussagen nötig sind.

Es sei $\mathcal{E}$ eine Garbe topologischer Räume über dem topologischen Raum X. Auf den Räumen $\mathcal{E}(U)$ wird eine Homotopierelation definiert, und zwar heißen zwei Schnitte $f, g \in \mathcal{E}(U)$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ mit $\varphi(o) = f$ und $\varphi(1) = g$ gibt. Dabei ist I das abgeschlossene Einheitsintervall in dem Körper der reellen Zahlen und U ist eine beliebige offene Teilmenge von X. Ist f homotop zu g, so wird abkürzend $f \sim g$ geschrieben. Dann heißen f und g ineinander deformierbar. Die Kurve φ heißt die Homotopie, die f und g verbindet. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}(U)$; die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen. Wegen ihrer Stetigkeit sind die Beschränkungsabbildungen $r_V^U : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(V)$, für V und U offen in X und $V \subset U$, mit den Homotopierelationen verträglich, d. h. die Bildschnitte homotoper Schnitte sind homotop.

Mit $\Pi(X, \mathcal{E})$ sei die Menge der Homotopieklassen der Schnittmenge $\mathcal{E}(X)$ bezeichnet; ist $f \in \mathcal{E}(X)$, so bezeichne $\Lambda_f(X, \mathcal{E})$ seine Homotopieklasse. Wenn $\mathcal{K}$ eine Garbe von topologischen Gruppen ist, dann sei unter $\Lambda(X, \mathcal{K})$ die Gruppe der einshomotopen Schnitte aus $\mathcal{K}(X)$ verstanden. Es sei auf $\Pi(X, \mathcal{K})$ die in natürlicher Weise gegebene Gruppenstruktur eingeführt, für die die kanonische Projektion $\mathcal{K}(X) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{K})$ ein Gruppenhomomorphismus ist. $\Lambda(X, \mathcal{K})$ ist das Einselement von $\Pi(X, \mathcal{K})$, und $\Pi(X, \mathcal{K})$ ist die Faktorgruppe von $\mathcal{K}(X)$ nach dem Normalteiler $\Lambda(X, \mathcal{K})$.

Eine stetige Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ zwischen den Garben $\mathcal{E}_i$ von topologischen Räumen über X induziert eine Abbildung

$$h': \Pi(X, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_1) \quad ,$$

gegeben durch $\Lambda_f(X, \mathcal{E}_2) \longmapsto \Lambda_{f_1}(X, \mathcal{E}_1)$ für $f \in \mathcal{E}_2(X)$ und $f_1 := h_X(f)$. Der Homotopieklasse von $f \in \mathcal{E}_2(X)$ soll also die Homotopieklasse von $h_X(f) \in \mathcal{E}_1(X)$ zugeordnet werden. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten eines Elements aus $\Pi(X, \mathcal{E}_2)$, weil die Abbildung $h_X: \mathcal{E}_2(X) \longrightarrow \mathcal{E}_1(X)$ auf Grund ihrer Stetigkeit homotope Schnitte in homotope Schnitte überführt.

Die Abbildung h' ist genau dann injektiv, wenn je zwei Schnitte aus $\mathcal{E}_2(X)$, deren Bilder bzgl. h_X in $\mathcal{E}_1(X)$ homotop sind, selber in $\mathcal{E}_2(X)$ homotop sind. Die Surjektivität von h' bedeutet, daß jeder Schnitt aus $\mathcal{E}_1(X)$ sich in einen anderen Schnitt aus $\mathcal{E}_1(X)$ deformieren läßt, der das Bild eines Schnittes aus $\mathcal{E}_2(X)$ mittels h_X ist. Der später bewiesene Hauptsatz dieser

Arbeit gibt einige hinreichende Bedingungen an, unter denen eine stetige Garbenabbildung $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ eine bijektive Abbildung h' induziert.

Wirkt eine Garbe $\mathcal{K}$ von topologischen Gruppen auf einer Garbe $\mathcal{E}$ von topologischen Räumen durch die stetige Garbenabbildung $w: \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, dann induziert w in natürlicher Weise eine Abbildung

$$w': \Pi(X, \mathcal{K}) \times \Pi(X, \mathcal{E}) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E})$$

Die Gruppe $\Pi(X, \mathcal{K})$ wirkt auf der Menge $\Pi(X, \mathcal{E})$ durch w'. Die kanonischen Projektionen $\mathcal{K}(X) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{K})$ und $\mathcal{E}(X) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E})$ sind mit den Wirkungsabbildungen w_X und w' verträglich (siehe § 2). Ist $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, w_i)$, $i=1,2$, eine Garbe von homogenen Räumen auf X und sind Garbenabbildungen $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ und $k: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$, die mit w_i verträglich sind, gegeben, dann sind die induzierten Abbildungen h' und k' mit den Wirkungsabbildungen w_i' verträglich.

Definition 6.

Es sei $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Räumen über dem topologischen Raum X und f sei ein Schnitt von $\mathcal{E}$ über X. Die Garbe $\rho_f(\mathcal{E})$, gegeben durch

$$\rho_f(\mathcal{E})(U) := \{ \varphi : I \xrightarrow[\text{stetig}]{} \mathcal{E}(U) \text{ mit } \varphi(o) = f|U \}$$

für alle offenen Teilmengen U von X, heißt die Garbe der Kurven in $\mathcal{E}$ mit Anfangspunkt f.

In den Mengen $\rho_f(\mathcal{E})(U)$ wird die Topologie der kompakten Konvergenz eingeführt, wodurch $\rho_f(\mathcal{E})$ zu einer Garbe von

topologischen Räumen wird. Ist $\mathcal{K}$ eine Garbe von topologischen Gruppen über X, dann sei $\rho(\mathcal{K})$ die Garbe der Kurven in $\mathcal{K}$ mit dem Einsschnitt von $\mathcal{K}(X)$ als Anfangspunkt bezeichnet. Diese Garbe ist mit der erwähnten T_0pologie eine Garbe von topologischen Gruppen.

Es sei $\mathcal{K}$ eine Garbe von topologischen Gruppen über X, die auf einer Garbe $\mathcal{E}$ von topologischen Räumen über X durch die Abbildung $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ wirkt. f sei ein Schnitt aus $\mathcal{E}(X)$. Dann wird eine Abbildung

$$\cdot : \rho(\mathcal{K}) \times \rho_f(\mathcal{E}) \longrightarrow \rho_f(\mathcal{E}),\ (\Psi, \varphi) \longmapsto \Psi \cdot \varphi\ ,$$

durch $(\Psi \cdot \varphi)(t) := \Psi(t) \cdot \varphi(t)$ für alle $\Psi \in \rho(\mathcal{K})(U)$, $\varphi \in \rho_f(\mathcal{E})(U)$, $t \in I$ und U offen in X definiert. Die Garbe $\rho(\mathcal{K})$ von topologischen Gruppen wirkt auf der Garbe $\rho_f(\mathcal{E})$ von topologischen Räumen durch diese Abbildung.

Wirkt $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{E}$ und $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_f(\mathcal{E})$ für ein $f \in \mathcal{E}(X)$, dann wirkt $\mathcal{K}$ sogar transitiv auf $\mathcal{E}$, falls $\mathcal{E}$ lokal kurvenzusammenhängend ist, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, so daß der Raum $\mathcal{E}(U)$ kurvenzusammenhängend ist.

Wirkt $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{E}$ und gilt für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x, daß es zu jeder stetigen Abbildung $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und ein Element $\Psi \in \rho(\mathcal{K})(V)$ mit $\Psi(t) \cdot \varphi(o) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gibt, dann wirkt $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_f(\mathcal{E})$ für alle $f \in \mathcal{E}(X)$. Denn für

$\varphi_i \in \rho_f(\mathcal{E}(U))$, i=1,2, gibt es Umgebungen $V_i \subset U$ von x und Elemente $\psi_i \in \rho(\mathcal{K})(V_i)$ mit $\psi_i(t) \cdot f = \varphi_i(t)$. Daher ist $\psi := \psi_2 \psi_1^{-1}$ aus $\rho(\mathcal{K})(V_1 \cap V_2)$ und es ist $\psi(t) \cdot \varphi_1(t) = \psi_2(t) \cdot f = \varphi_2(t)$, woraus die Transitivität der Wirkung von $\rho(\mathcal{K})$ auf $\rho_f(\mathcal{E})$ folgt.

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{K}, \cdot)$ eine Garbe von homogenen Räumen über X, f und g seien beliebige Schnitte aus $\mathcal{E}(X)$. Dann gilt: Wirkt $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_f(\mathcal{E})$, so wirkt $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_g(\mathcal{E})$. Denn zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und einen Schnitt $M \in \mathcal{K}(U)$ mit $f = M \cdot g$. Damit werden Elemente φ_i, i=1,2, aus $\rho_g(\mathcal{E})(U)$ in Elemente $M \cdot \varphi_i$ aus $\rho_f(\mathcal{E})(U)$ transformiert. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von x und ein $\psi \in \rho(\mathcal{K})(V)$ mit $\psi \cdot (M \cdot \varphi_1) = M \cdot \varphi_2$, woraus $(M^{-1} \psi M) \cdot \varphi_1 = \varphi_2$ und damit die Behauptung folgt.

Die beiden letzten Ausführungen ergeben den folgenden Hilfssatz 3, der in den Anwendungen des später bewiesenen Hauptsatzes häufig benutzt wird. Es sei $\mathcal{K}$ eine Garbe topologischer Gruppen über dem topologischen Raum X, die auf einer Garbe $\mathcal{E}$ topologischer Räume über X durch $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ wirkt. Dann gilt:

Hilfssatz 3.

> Wirkt $\mathcal{K}$ transitiv auf $\mathcal{E}$ und ist $f \in \mathcal{E}(X)$, dann wirkt $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_f(\mathcal{E})$ genau dann, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x gilt: Zu jeder Kurve $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und ein Element $\psi \in \rho(\mathcal{K})(V)$ mit $\psi(t) \cdot \varphi(o) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$.

Nach diesen Vorbereitungen werden wieder exakte Sequenzen betrachtet und insbesondere exakte Homotopiesequenzen abgeleitet.

Für den Rest dieser Arbeit sei X ein komplexer Raum im Sinne von Serre [22, 13] mit abzählbarer Topologie. Ein holomorphvollständiger komplexer Raum X heißt Steinsch. Mit $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{O}$ sei die Garbe der Keime stetiger bzw. holomorpher Funktionen auf X bezeichnet.

F sei ein holomorphes Faserbündel über X mit einer komplexen Lieschen Gruppe als Faser (siehe [6, § 1]). Es seien $\mathcal{F}_c$ und $\mathcal{F}_\omega$ die Garben von Keimen stetiger bzw. holomorpher Schnitte von F.

Es sei $\mathcal{E}$ eine Garbe von topologischen Räumen über X; $\mathcal{K}$ sei eine Garbe von topologischen Gruppen über X, die mittels $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ auf $\mathcal{E}$ wirkt, und f sei ein Schnitt von $\mathcal{E}$ über X. Die Garbe $\rho(\mathcal{K})$ wirke mittels der durch „$\cdot$" induzierten Abbildung transitiv auf der Garbe $\rho_f(\mathcal{E})$, und die Isotropiegarbe $\mathcal{K}^f$ sei eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ oder eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega$ (siehe [6, § 2]). Unter Anwendung des Hilfssatzes 1 und der in [6] entwickelten Theorie der Okaschen Paare wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 2.

> Ist X Steinsch, dann induziert die durch $M \longmapsto M \cdot f$ gegebene Garbenabbildung $\psi_f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ eine surjektive Abbildung
>
> $$\Lambda(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Lambda_f(X, \mathcal{E}).$$

Beweis: Die Abbildung $\Psi_{f,X}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$, $M \longmapsto M \cdot f$ ist stetig, da die Wirkungsabbildung stetig ist und führt deshalb homotope Schnitte in homotope Schnitte über. Der Einsschnitt von $\mathcal{K}(X)$ wird in f abgebildet. Somit ist

$$\Psi_{f,X}(\Lambda(X,\mathcal{K})) \subset \Lambda_f(X,\mathcal{E})$$

und daher ist eine Abbildung $\Lambda(X,\mathcal{K}) \longrightarrow \Lambda_f(X,\mathcal{E})$, $M \longmapsto M \cdot f$, definiert.

Ein Element $\tilde{\varphi} \in \rho_f(\mathcal{E})(X)$ wird durch die konstante Abbildung $\tilde{\varphi}(t) = f$, $t \in I$, gegeben. Weil die Garbe $\rho(\mathcal{K})$ auf der Garbe $\rho_f(\mathcal{E})$ wirkt, kann die Isotropiegarbe $(\rho(\mathcal{K}))^{\tilde{\varphi}}$ von $\tilde{\varphi}$ in $\rho(\mathcal{K})$ gebildet werden. Für jede offene Teilmenge U von X ist

$$(\rho(\mathcal{K}))^{\tilde{\varphi}}(U) := \{\varphi \in \rho(\mathcal{K})(U): \varphi \cdot \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}\} = \rho(\mathcal{K}^f)(U),$$

also ist $(\rho(\mathcal{K}))^{\tilde{\varphi}} = \rho(\mathcal{K}^f)$.

Nach Voraussetzung wirkt $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_f(\mathcal{E})$. Deshalb kann Hilfssatz 1 angewendet werden. Folglich ist die Cohomologiesequenz

$$1 \to H^0(X,\rho(\mathcal{K}^f)) \to H^0(X,\rho(\mathcal{K})) \to H^0(X,\rho_f(\mathcal{E})) \to H^1(X,\rho(\mathcal{K}^f)) \to H^1(X,\rho(\mathcal{K}))$$

exakt.

Nach der Voraussetzung bezüglich der Garbe $\mathcal{K}^f$ und da X Steinsch ist, kann ein Satz aus der Theorie der Okaschen Paare [6, § 5, Zusatz zu Satz 2] angewendet werden, wonach $H^1(X,\rho(\mathcal{K}^f)) = 1$ ist. Daraus folgt die Surjektivität der Abbildung

$$H^0(X,\rho(\mathcal{K})) \longrightarrow H^0(X,\rho_f(\mathcal{E})), \qquad \varphi \longmapsto \varphi \cdot \tilde{\varphi}\ .$$

Es sei g ein beliebiger Schnitt aus $\Lambda_f(X, \mathcal{E})$. Dann ist die Homotopie Ψ, die f mit g verbindet, ein Element aus $H^0(X, \rho_f(\mathcal{E}))$. Es gibt also ein $\varphi \in H^0(X, \rho(\mathcal{K}))$ mit $\varphi \cdot \tilde{\varphi} = \Psi$. Dann ist $\varphi(1) \in \Lambda(X, \mathcal{K})$ und $\varphi(1) \cdot f = g$, d. h. die gewünschte Surjektivität ist nachgewiesen.

q. e. d.

Unter Verwendung der Bezeichnungen von Satz 2 ergibt sich sofort die

Folgerung.

Ein Schnitt $g \in \mathcal{E}(X)$ ist genau dann zu f homotop, wenn es einen einshomotopen Schnitt $M \in \mathcal{K}(X)$ mit $g = M \cdot f$ gibt.

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{K}, \cdot)$ eine Garbe von homogenen Räumen über X. Für jedes $g \in \mathcal{E}(X)$ wirke $\rho(\mathcal{K})$ transitiv auf $\rho_g(\mathcal{E})$ mittels der durch „$\cdot$" induzierten Abbildung, und es sei $\mathcal{K}^g$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe einer Garbe $\mathcal{F}_c$ oder eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe einer Garbe $\mathcal{F}_\omega$. Für einen festen Schnitt $f \in \mathcal{E}(X)$ sei $\Psi_f\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ die durch $M \longmapsto M \cdot f$ gegebene Garbenabbildung, und mit $i\colon \mathcal{K}^f \longrightarrow \mathcal{K}$ sei die Inklusion bezeichnet. Nach Hilfssatz 1 ist die Cohomologiesequenz

$$(C)\quad 1 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}^f) \xrightarrow{i_X} H^0(X, \mathcal{K}) \xrightarrow{\Psi_{f,X}} H^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{K}^f) \xrightarrow{i_*} H^1(X, \mathcal{K}),$$

wobei δ wie in dem Beweis zu Hilfssatz 1 definiert ist, exakt. Dann gilt

Satz 3.

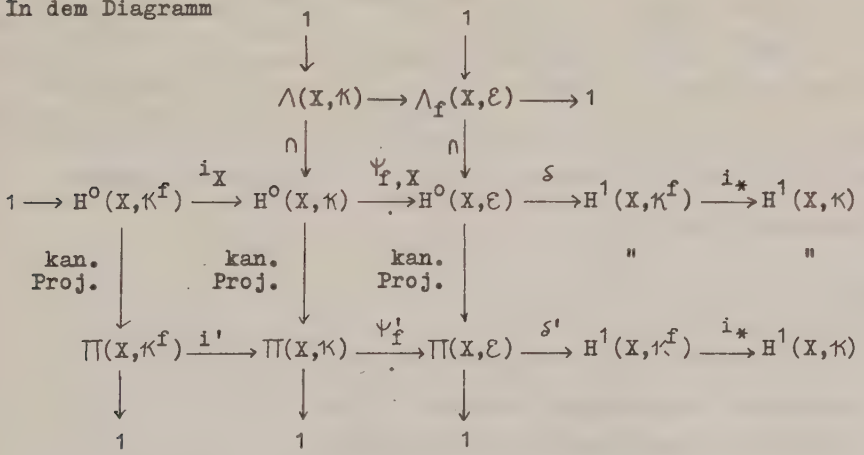
Ist X Steinsch, dann induziert die Cohomologiesequenz (C) eine exakte Sequenz

(H) $\Pi(X,\mathcal{K}^f) \xrightarrow{i'} \Pi(X,\mathcal{K}) \xrightarrow{\Psi_f'} \Pi(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta'} H^1(X,\mathcal{K}^f) \xrightarrow{i_*} H^1(X,\mathcal{K})$.

Beweis: Es sei $\Lambda_f(X,\mathcal{E})$ das ausgezeichnete Element von $\Pi(X,\mathcal{E})$ in der obigen Sequenz. Die Abbildungen i' und Ψ_f' seien die durch i bzw. Ψ_f induzierten Abbildungen (siehe den Anfang dieses Paragraphen).

1) Definition der Abbildung δ': $\Pi(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}^f)$.
Für ein beliebiges $g \in \mathcal{E}(X)$ sei $\delta'(\Lambda_g(X,\mathcal{E})) := \delta(g)$. Es wird gezeigt, daß diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Homotopieklasse ist. Dazu sei g' ein Schnitt aus $\mathcal{E}(X)$, der zu g homotop ist. Nach den Voraussetzungen gilt die Folgerung zu Satz 2 für alle Schnitte aus $\mathcal{E}(X)$. Daher existiert ein $M \in \mathcal{K}(X)$ mit $M \cdot g = g'$. Weil die Exaktheitsbedingung (E2) für die Sequenz (C) erfüllt ist, folgt $\delta(g) = \delta(g')$.

2) Exaktheit der Sequenz (H).
In dem Diagramm



sei die Abbildung $\Lambda(X,\mathcal{K}) \longrightarrow \Lambda_f(X,\mathcal{E})$ die durch $\Psi_{f,X}$ induzierte Abbildung. Nach Satz 2 ist die erste Zeile von oben

exakt. Das gleiche gilt nach Hilfssatz 1 für die zweite Zeile von oben. Alle Spalten sind trivialerweise exakt.

Nach der Definition der Abbildungen i', ψ_f', und δ' ist die Kommutativität des Diagramms gewährleistet.

Die gewünschte Exaktheit folgt nach Anwendung von Satz 1 auf das obige Diagramm.

q. e. d.

Es sei $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot)$, i=1,2, eine Garbe von homogenen Räumen über X. Für jedes $g_i \in \mathcal{E}_i(X)$ wirke $\rho(\mathcal{K}_i)$ transitiv auf $\rho_{g_i}(\mathcal{E}_i)$ mittels der durch „·" induzierten Abbildung; es sei $\mathcal{K}_i^{g_i}$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe einer Garbe $\mathcal{F}_c$ oder eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe einer Garbe $\mathcal{F}_\omega$. Ferner seien eine Garbenabbildung h: $\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ und ein Garbenhomomorphismus k: $\mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ gegeben, die mit den Wirkungsoperationen verträglich sind (siehe § 2). Für einen festen Schnitt $f = f_2 \in \mathcal{E}_2(X)$ sei $f_1 := h_X(f)$ und die Abbildung $\Psi_{f_i} : \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i$ sei gegeben durch $M \longmapsto M \cdot f_i$. Es sei $\iota_i : \mathcal{K}_i^{f_i} \longrightarrow \mathcal{K}_i$ die Inklusion und $k^f : \mathcal{K}_2^f \longrightarrow \mathcal{K}_1^{f_1}$ sei der durch k induzierte Garbenhomomorphismus (siehe § 2). Nach Hilfssatz 2 ist das dort angegebene Diagramm (D) kommutativ. Es gilt:

Satz 4.

Ist X Steinsch, dann induziert das in Hilfssatz 2 angegebene Diagramm (D) das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Pi(X,\mathcal{K}_2^f) & \xrightarrow{\lambda_2'} & \Pi(X,\mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\psi_f'} & \Pi(X,\mathcal{E}_2) & \xrightarrow{\delta_2'} & H^1(X,\mathcal{K}_2^f) & \xrightarrow{\lambda_{2*}} & H^1(X,\mathcal{K}_2) \\
\downarrow{\scriptstyle (k^f)'} & & \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle k_*^f} & & \downarrow{\scriptstyle k_*} \\
\Pi(X,\mathcal{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\lambda_1'} & \Pi(X,\mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\psi_{f_1}'} & \Pi(X,\mathcal{E}_1) & \xrightarrow{\delta_1'} & H^1(X,\mathcal{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\lambda_{1*}} & H^1(X,\mathcal{K}_1)
\end{array} .$$

Beweis: Die Abbildungen δ_i' ergeben sich nach Anwendung von Satz 3 auf $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot)$. Dazu werden die Voraussetzungen für $\rho(\mathcal{K}_i)$ und $\mathcal{K}_i^{g_i}$ verwendet. Weil das Diagramm (D) kommutativ ist, folgt sofort die Kommutativität des obigen Diagramms aus der Definition der dort vorkommenden Abbildungen.

Nach Satz 3 sind sogar die Zeilen des Diagramms aus Satz 4 exakt. Dabei ist die Homotopieklasse von $f \in \mathcal{E}_2(X)$ bzw. von $h_X(f)$ das ausgezeichnete Element von $\Pi(X, \mathcal{E}_2)$ bzw. $\Pi(X, \mathcal{E}_1)$.

q. e. d.

Spezialfälle von den Sätzen 2 und 3 sind in [8, Satz 4 bzw. Hilfssatz 4] angegeben; ein spezieller Fall von Satz 4 ist im Beweis von [8, Satz 5] formuliert.

III. Voraussetzungen, Formulierung und Beweis des Hauptsatzes

In Paragraph 6 wird die in [6] dargelegte Theorie der Okaschen Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen fortgesetzt. Es werden Isomorphie- und Lokalitätsaussagen für solche Paare sowie die Existenz einer rechtsinvarianten, mit den Beschränkungsabbildungen verträglichen Metrik auf den Schnittmengen dieser Paare bewiesen. Der Paragraph 7 bringt die Definition und eine wichtige Eigenschaft eines Okaschen Paares von Garben homogener Räume. Mit diesen und mit den im Kapitel II ausgeführten Vorbereitungen kann in Paragraph 8 der Hauptsatz formuliert und bewiesen werden.

Unter einem komplexen Raum wird für den Rest der Arbeit ein komplexer Raum im Sinne von Serre [22, 13] mit abzählbarer Topologie verstanden.

§ 6. Okasche Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen.

Es wird eine kurze Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen und Begriffe vorausgeschickt.

F sei ein holomorphes Faserbündel über dem komplexen Raum X mit der komplexen Lieschen Gruppe G als Faser. Das zu F assoziierte holomorphe Faserbündel mit der Lie-Algebra A(G) von G als Faser wird mit A(F) bezeichnet (siehe [15] und [3]). Bekanntlich ist die Faser von F über $x \in X$ eine komplexe Liesche Gruppe, deren Lie-Algebra die Faser von A(F) über x ist.

Ist $p: F \longrightarrow X$ die Projektion von F auf X, dann ist die Beschränkung $F|U := p^{-1}(U)$ von F auf der offenen Teilmenge U von X in natürlicher Weise ein holomorphes Faserbündel über U mit G als Faser. Es sei $A(F)|U := \pi^{-1}(U)$, wobei $\pi : A(F) \longrightarrow X$

die Projektion von A(F) auf X ist. Dann ist $A(F|U) = A(F)|U$.

Es seien $\mathcal{F}_c$ bzw. $\mathcal{F}_\omega$ und $\mathcal{A}_c$ bzw. $\mathcal{A}_\omega$ die Garben über X der Keime stetiger bzw. holomorpher Schnitte von F und A(F). Die Verknüpfungen auf F und A(F) induzieren Verknüpfungen auf den Schnittmengen von F und A(F). Dadurch wird $\mathcal{F}_\alpha$ zu einer Garbe von Gruppen, $\alpha = c, \omega$. $\mathcal{A}_c$ ist eine $\mathcal{C}$-Modulgarbe und $\mathcal{A}_\omega$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe von Lie-Algebren. Dabei bezeichnen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{O}$ die Garben der lokalen stetigen bzw. holomorphen Funktionen auf X.

In den Schnittmengen wird die Topologie der kompakten Konvergenz eingeführt; sie macht $\mathcal{F}_\alpha$ zu einer Garbe von vollständigen topologischen Gruppen und $\mathcal{A}_\alpha$ zu einer Fréchetgarbe, $\alpha = c, \omega$. Für eine offene Teilmenge U von X ist die Garbe der lokalen Schnitte des holomorphen Faserbündels F|U bzw. A(F|U) die Beschränkungsgarbe $\mathcal{F}_\alpha|U$ bzw. $\mathcal{A}_\alpha|U$.

Jedes Element $g_0 \in G$ definiert einen inneren Automorphismus von G durch die Zuordnung $g \longmapsto g_0\, g\, g_0^{-1}$. Das Differential dieser Abbildung, das ein Automorphismus von A(G) ist, läßt sich in der Form $a \longmapsto g_0\, a\, g_0^{-1}$ schreiben (siehe [3, § 8] und [15, II, 1.c]); es wird mit ad g_0 bezeichnet und heißt die adjungierte Abbildung. Damit induziert jeder Schnitt $M_0 \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ Prägarbenautomorphismen $\mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha$ und ad M_0: $\mathcal{A}_\alpha \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha$, die für $U \subset X$ offen gegeben sind durch

$$\mathcal{F}_\alpha(U) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha(U),\ M \longmapsto M_0\, M\, M_0^{-1}$$

bzw.

$$\text{ad } M_0\colon\ \mathcal{A}_\alpha(U) \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha(U),\ a \longmapsto M_0\, a\, M_0^{-1}$$

Die gewöhnliche Exponentialabbildung zwischen Lie-Algebra und Lie-Gruppe induziert eine fasertreue holomorphe Abbildung $\exp: \mathbf{A}(F) \longrightarrow F$. Diese Abbildung induziert wiederum eine Garbenabbildung $\mathrm{Exp}: \mathcal{A}_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha$ durch $a \longmapsto \exp \cdot a$. Einige Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialabbildung übertragen sich auf exp bzw. Exp: Der Nullschnitt wird in den Einsschnitt mittels Exp abgebildet; es gibt sogar eine offene Umgebung Θ_0 der Nullschnittfläche von $\mathbf{A}(F)$, die durch exp biholomorph auf eine offene Umgebung Λ_0 der Einsschnittfläche von F abgebildet wird. Ferner gilt für $U \subset X$ offen und $a \in \mathcal{A}_\alpha(U)$ (vgl. [4, IV, § IX])

$$(*) \qquad (\mathrm{Exp} \cdot \mathrm{ad}\, M_0)(a) = M_0(\mathrm{Exp}\, a)M_0^{-1} \quad .$$

Offenbar wird $\mathbf{A}(F)|U$ durch exp in $F|U$ abgebildet. Dabei wird $\Theta_0|U := \Theta_0 \cap \pi^{-1}(U)$ biholomorph auf $\Lambda_0|U := \Lambda_0 \cap p^{-1}(U)$ abgebildet.

Im folgenden wird, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, unter einer Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$ bzw. $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, immer eine Untergarbe von Gruppen bzw. Lie-Algebren, deren Schnittmengen die durch $\mathcal{F}_\alpha(U)$ bzw. $\mathcal{A}_\alpha(U)$ induzierte Topologie tragen, verstanden. Außerdem wird mit "Isomorphismus" immer ein Prägarbenisomorphismus gemeint.

Für eine Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_\alpha$ wird für jedes $x \in X$ eine Untergruppe $\mathcal{K}(x)$ der Faser $F(x)$ von F über x wie folgt definiert (siehe [6, § 2]):

$$\mathcal{K}(x) := \bigcup_{U \ni x} \beta_x^U(\mathcal{K}(U)).$$

Dabei ist $\beta_x^U: \mathcal{F}_\alpha(U) \longrightarrow F(x)$ die Abbildung, die jedem Schnitt $s \in \mathcal{F}_\alpha(U)$ seinen Wert $s(x)$ im Punkte x zuordnet. Die Vereinigung ist über alle offenen Umgebungen U von x zu bilden.

Wesentlich für die Definition eines Okaschen Paares von Garben nicht-abelscher Gruppen ist der Begriff einer Lieschen Untergarbe. Eine Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_\alpha$ heißt eine Liesche Untergarbe, wenn es eine Untergarbe $\mathcal{R}$ von $\mathcal{A}_\alpha$ und eine offene Umgebung $\Theta \subset \Theta_0$ der Nullschnittfläche von A(F) gibt, so daß für jedes U aus einer Basis der Topologie von X gilt: $\mathrm{Exp}(\mathcal{R}(U)_\Theta) = \mathcal{K}(U)_\Lambda$ mit $\Lambda := \exp\Theta$, $\mathcal{R}(U)_\Theta := \{a \in \mathcal{R}(U): a(U) \subset \Theta\}$ und $\mathcal{K}(U)_\Lambda := \{M \in \mathcal{K}(U): M(U) \subset \Lambda\}$. $\mathcal{R}(U)_{\Theta'}$ wird sogar für jedes $\Theta' \subset \Theta$ und jedes offene $U \subset X$ bijektiv auf $\mathcal{K}(U)_{\Lambda'}$, wobei $\Lambda' := \exp\Theta'$ ist, durch die Abbildung Exp abgebildet. Das folgt durch Anwendung der Garbenaxiome, der Definition von Exp und der Tatsache, daß $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}_\alpha(U)_{\Theta_0}) = \mathcal{F}_\alpha(U)_{\Lambda_0}$ für jede offene Teilmenge U von X ist. Die eben erwähnte Garbe $\mathcal{R}$ heißt eine Erzeugendengarbe von $\mathcal{K}$. Jede Liesche Untergarbe besitzt genau eine Erzeugendengarbe, wie aus dem weiter unten formulierten Hilfssatz 4 zu entnehmen ist.

Eine Liesche Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_\omega$ bzw. $\mathcal{F}_c$ heißt eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe bzw. eine $\mathcal{C}$-Untergarbe, wenn die Erzeugendengarbe $\mathcal{R}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{A}_\omega$ bzw. eine $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{A}_c$ ist. Eine Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_c$ heißt vollständig, wenn $\mathcal{K}(U)$ eine vollständige Untergruppe von $\mathcal{F}_c(U)$ für jede offene Menge $U \subset X$ ist; gleichbedeutend damit ist, daß $\mathcal{K}(U)$ abgeschlossen in $\mathcal{F}_c(U)$ für alle offenen $U \subset X$ liegt.

Ist $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ bzw. $\mathcal{F}_\omega$, dann heißt das Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein zulässiges Paar, falls $\mathcal{K}_1$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{K}_2$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega$ und $\mathcal{K}_2$ eine Untergarbe von $\mathcal{K}_1$ ist. Ein zulässiges Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ist genau dann ein Okasches Paar von

Garben nicht-abelscher Gruppen, wenn die folgende punktale Homotopiebedingung erfüllt ist: die natürliche Abbildung zwischen den q-ten Homotopiegruppen von $\mathcal{K}_2(x)$ und $\mathcal{K}_1(x)$ ist für alle $x \in X$ und $q = 0,1,2,\ldots$ bijektiv ([6, Satz 1]). Diese Bedingung ist trivialerweise erfüllt, falls $\mathcal{K}_1(x) = \mathcal{K}_2(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Nach diesen Vorbereitungen wird eine Isomorphie- und anschließend eine Lokalitätsaussage bewiesen.

Eine Garbe topologischer Gruppen, die isomorph einer Lieschen Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ oder $\mathcal{F}_\omega$ ist, ist nicht notwendigerweise selber eine Liesche Untergarbe. Die folgende Isomorphieaussage gilt jedoch für zwei Untergarben $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ von $\mathcal{F}_\alpha$ und beliebiges aber festes $\alpha \in \{c, \omega\}$:

Satz 5.

> Gibt es einen Schnitt $M_0 \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, der einen Isomorphismus $\mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}''$ durch $M \longmapsto M_0\, M\, M_0^{-1}$ definiert, dann ist $\mathcal{K}''$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$, wenn $\mathcal{K}'$ eine solche ist. Ferner ist $\mathcal{K}''$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega$ bzw. eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$, wenn $\mathcal{K}'$ die gleichen Eigenschaften hat.

Beweis: $\mathcal{R}'$ sei die Untergarbe von $\mathcal{A}_\alpha$, die $\mathcal{K}'$ erzeugt, und θ' sei die zugeordnete Umgebung der Nullschnittfläche von A(F). Dann definiert

$$\mathcal{R}''(U) := \mathrm{ad}\, M_0\, (\mathcal{R}'(U)) \quad ,$$

wobei U eine offene Teilmenge von X ist, eine Untergarbe $\mathcal{R}''$ von $\mathcal{A}_\alpha$. Mit $M_0(X)\, \theta'\, M_0(X)^{-1}$ sei die Teilmenge von A(F) bezeichnet, deren Durchschnitt mit der Faser von A(F) über $x \in X$ das Bild des Durchschnittes von θ' mit der Faser von A(F) über x bezüg-

lich ad $M_o(x)$ ist. Es sei $\theta'' := (M_o(X)\,\theta'\,M_o(X)^{-1}) \cap \theta_o$. Dann ist $\mathcal{R}''(U)_{\theta''} = \mathrm{ad}\, M_o\,(\mathcal{R}'(U)_{\theta'})$. Aus der obigen Gleichung (*) folgt

$$\mathrm{Exp}\,(\mathcal{R}''(U)_{\theta''}) = M_o\,\mathcal{K}'(U)_{\Lambda'}\,M_o^{-1} \quad ,$$

wobei $\Lambda' := \exp\theta'$ ist. Für $\Lambda'' := \exp\theta''$ gilt $\Lambda'' = M_o(X)\Lambda' M_o(X)^{-1}$, und es ist $\mathcal{K}''(U) = M_o\,\mathcal{K}'(U)\,M_o^{-1}$ wegen des vorausgesetzten Isomorphismus. Daher ist $\mathcal{K}''(U)_{\Lambda''} = M_o\,\mathcal{K}'(U)_{\Lambda'}\,M_o^{-1}$, woraus sich $\mathrm{Exp}(\mathcal{R}''(U)_{\theta''}) = \mathcal{K}''(U)_{\Lambda''}$ ergibt. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{K}''$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$ ist.

Ist $\mathcal{R}'$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe der kohärenten Garbe $\mathcal{A}_\omega$, dann gilt das gleiche für $\mathcal{R}''$, weil $\mathcal{R}''$ von endlichem Typ ist: Die Erzeugenden von $\mathcal{R}''$ sind die Bilder der Erzeugenden von $\mathcal{R}'$ durch die adjungierte Abbildung.

Falls $\mathcal{K}'$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ ist, gilt das gleiche für $\mathcal{K}''$, denn $\mathcal{K}''(U)$ ist nach Voraussetzung das Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathcal{K}'(U)$, also ebenfalls abgeschlossen.

q. e. d.

Nach der punktalen Homotopiebedingung (vgl. [6, Satz 1]) ergibt sich die folgende Ergänzung zu der Isomorphieaussage:

Folgerung.

> Für die Untergarben $\mathcal{K}_1'$, $\mathcal{K}_1''$ von $\mathcal{F}_c$ und $\mathcal{K}_2'$, $\mathcal{K}_2''$ von $\mathcal{F}_\omega$ gilt: Gibt es ein $M_o \in \mathcal{F}_\omega(X)$, so daß $\mathcal{K}_i' \longrightarrow \mathcal{K}_i''$, $M \longmapsto M_o\,M\,M_o^{-1}$, für i=1,2 ein Isomorphismus ist, dann ist $(\mathcal{K}_1'', \mathcal{K}_2'')$ ein zulässiges bzw. Okasches Paar, wenn $(\mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2')$ ein solches Paar ist.

Ist $\mathcal{K}$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$, dann ist die Beschränkungsgarbe $\mathcal{K} \mid U$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha \mid U$

für alle offenen Teilmengen U von X: Die Erzeugendengarbe von $\mathfrak{K}|U$ bzw. die zugeordnete offene Umgebung der Nullschnittfläche von $\mathbf{A}(F)|U$ ist nämlich die Beschränkung $\mathfrak{R}|U$ der Erzeugendengarbe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ auf U bzw. die Beschränkung $\Theta|U$ der $\mathfrak{R}$ -zugeordnete Umgebung Θ auf U. Wenn eine Untergarbe $\mathfrak{K}$ von $\mathcal{F}_\alpha$ global eine Liesche Untergarbe ist, dann ist sie also auch lokal eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$.

Im folgenden wird die Umkehrung dieser Aussage untersucht. Zunächst aber einige Hilfsaussagen:

Hilfssatz 4.

Zwei Untergarben $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ von Untervektorräumen der Garbe $\mathcal{A}_\alpha$, die in einer offenen Umgebung Θ der Nullschnittfläche von $\mathbf{A}(F)$ übereinstimmen, d. h. $\mathcal{A}'(U)_\Theta = \mathcal{A}''(U)_\Theta$ für alle $U \subset X$ offen, sind identisch.

Beweis: Die Schnittmengen $\mathcal{A}'(U)$ und $\mathcal{A}''(U)$ seien für jedes $U \subset X$ offen mit der durch $\mathcal{A}_\alpha(U)$ induzierten Topologie versehen. Eine offene Umgebung Δ_0 des Nullschnittes von $\mathcal{A}_\alpha(U)$ kann so klein gewählt werden, daß für $a \in \Delta_0$ gilt $a(U) \subset \Theta$. Dann stimmen $\mathcal{A}'(U)$ und $\mathcal{A}''(U)$, die topologische Vektorräume über $\mathbb{C}$ sind, auf Δ_0 überein. Dabei bezeichnet $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

Ganz allgemein gilt für zwei Untervektorräume V', V" des topologischen Vektorraumes V über $\mathbb{C}$ mit $V' \cap W_0 = V'' \cap W_0$ für eine offene Umgebung W_0 des Nullelements in V, daß $V' = V''$ ist. Denn V' und V" sind, als Teilräume aufgefaßt, topologische Vektorräume über $\mathbb{C}$, woraus die Stetigkeit der Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow V'$ bzw. $\mathbb{C} \longrightarrow V''$, $\lambda \longmapsto \lambda a$, im Punkte $oa = o$ folgt. Zu $a \in V'$ gibt es also ein $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq o$, mit $\lambda a \in V''$.

Dann ist $\lambda^{-1}(\lambda a) = a \in V''$, also $V' \subset V''$. Ebenso folgt $V'' \subset V'$.

q. e. d.

Aus Hilfssatz 4 ergibt sich sofort die

Folgerung.

Eine Liesche Untergarbe besitzt genau eine Erzeugendengarbe.

Es sei $\mathcal{K}$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$. Sind $\mathcal{R}_i$, i=1,2, Erzeugendengarben von $\mathcal{K}$ mit den zugeordneten Umgebungen θ_i der Nullschnittfläche von A(F), dann ist für jede offene Teilmenge $U \subset X$

$$\mathcal{R}_1(U)_\theta = \operatorname{Exp}^{-1}(\mathcal{K}(U)_\Lambda) = \mathcal{R}_2(U)_\theta$$

mit $\theta := \theta_1 \cap \theta_2$ und $\Lambda := \exp\theta$. Aus Hilfssatz 4 folgt $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

In der nächsten Hilfsaussage werden endlich viele offene Teilmengen U_i, i=1,...,n, von X betrachtet, über denen es Karten für A(F) gibt.

Hilfssatz 5.

Ist θ_i, i=1,...,n, eine offene Umgebung der Nullschnittfläche von $A(F)|U_i$, dann gibt es eine offene Umgebung θ der Nullschnittfläche von $A(F)|\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ mit $\theta|U_i \subset \theta_i$ für i=1,...,n.

Beweis: θ wird durch Rekursion definiert. Für n = 1 sei $\theta := \theta_1$. Es sei m eine natürliche Zahl, für die $1 \leq m < n$ ist. $\tilde{\theta}$ sei eine offene Umgebung der Nullschnittfläche von $A(F)|\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ mit $\tilde{\theta}|U_i \subset \theta_i$ für i=1,...,m. Es wird eine offene Umgebung θ der Nullschnittfläche von $A(F)|\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$ mit $\theta|U_i \subset \theta_i$ für i=1,...,m+1

konstruiert.

Ist $U_{m+1} \cap U_i = \emptyset$ für i=1,...,m, so sei $\Theta := \tilde{\Theta} \cup \Theta_{m+1}$. Der Fall, daß es mindestens eine natürliche Zahl i gibt, für die $1 \leq i \leq m$ und $U_i \cap U_{m+1} \neq \emptyset$ gilt, wird jetzt betrachtet. Es seien $\Psi_j : A(F)|U_j \longrightarrow U_j \times A(G)$, j=1,...,m+1, Karten für A(F) über U_j. Dann gibt es offene Umgebungen V_j des Nullelements von A(G) mit

(+) $\quad \Psi_j(\tilde{\Theta}|U_j) = U_j \times V_j$ für $j = 1,...,m$

und

(++) $\quad \Psi_{m+1}(\Theta_{m+1}) = U_{m+1} \times V_{m+1}$.

Aus Gleichung (+) folgt

(+++) $\quad \tilde{\Theta} = \bigcup_{j=1}^{m} \Psi_j^{-1}(U_j \times V_j)$.

Für alle i, für die $1 \leq i \leq m$ und $U_{i,m+1} := U_i \cap U_{m+1} \neq \emptyset$ gilt, gibt es offene Umgebungen V_i' und V_i'' des Nullelements von A(G) mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\quad \Psi_i(\Psi_{m+1}^{-1}(U_{i,m+1} \times V_{m+1})) = U_{i,m+1} \times V_i'$

(2) $\quad \Psi_{m+1}(\Psi_i^{-1}(U_{i,m+1} \times V_i)) = U_{i,m+1} \times V_i''$.

Für

$$V := (\bigcap_{j=1}^{m+1} V_j) \cap (\bigcap_i (V_i' \cap V_i''))$$

sei

$$\Theta := \bigcup_{j=1}^{m+1} \Psi_j^{-1}(U_j \times V) .$$

Es ist $\Theta|U_i = \bigcup_{j=1}^{m+1} \Psi_j^{-1}(U_{ij} \times V)$ für alle i=1,...,m+1. Ist $U_i \cap U_{m+1} = \emptyset$, dann ist $\Theta|U_i = \tilde{\Theta}|U_i$ wegen (+++) und (+), also gilt $\Theta|U_i \subset \Theta_i$. Es sei $U_i \cap U_{m+1} \neq \emptyset$. Ist i = m+1, so

folgt $\Theta|U_{m+1} \subset \Theta_{m+1}$ aus den Gleichungen (1) und (++); für $1 \leq i \leq m$ ist $\Theta|U_i \subset \tilde{\Theta}|U_i \cup \varphi_{m+1}^{-1}(U_{i,m+1} \times V)$, woraus sich $\Theta|U_i \subset \Theta_i$ nach der Gleichung (2) ergibt.

q. e. d.

Der Hilfssatz 6 bringt eine Verallgemeinerung von Hilfssatz 5: Es sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine trivialisierende Überdeckung von A(F), wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Die Menge der natürlichen Zahlen sei mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Hilfssatz 6.

Es sei $(\Theta_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Umgebungen Θ_i der Nullschnittfläche von $A(F)|U_i$. Dann gibt es eine offene Umgebung Θ der Nullschnittfläche von A(F) und eine offene Überdeckung $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von X, die feiner als $\mathfrak{U}$ ist, mit $\Theta|V_m \subset \Theta_{t(m)}|V_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, wobei $t: \mathbb{N} \longrightarrow I$ die Verfeinerungsabbildung ist.

Beweis: Da X lokal-kompakt ist und eine abzählbare Topologie besitzt, kann X durch eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Teilmengen derart ausgeschöpft werden, daß X_n relativ-kompakt in X_{n+1} enthalten ist.

1) Konstruktion der Verfeinerung.

Durch Induktion wird eine abzählbare Überdeckung $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von X mit folgenden Eigenschaften konstruiert: es gibt eine aufsteigende Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\quad \overline{X}_n \subset \bigcup_{m=1}^{k_n} V_m \subset X_{n+1}$

(ii) $\quad X_n \cap V_m = \emptyset$ für $m > k_n$.

Da die abgeschlossene Hülle $\overline{X}_1$ von X_1 kompakt ist, gibt es eine endliche Zahl k_1 und eine Abbildung $t: \{1,\ldots,k_1\} \longrightarrow I$, so daß die $U_{t(m)}, m=1,\ldots,k_1$, eine Überdeckung von $\overline{X}_1$ bilden. Der Induktionsanfang sei durch $V_m := U_{t(m)} \cap X_2$ gegeben. Vorgegeben seien eine natürliche Zahl k_n und offene Teilmengen $V_m, m=1,\ldots,k_n$, von X, die (i) genügen. Zur Abkürzung sei

$$W_n =: \bigcup_{m=1}^{k_n} V_m \quad .$$

$\overline{X}_{n+1} \setminus W_n$ ist abgeschlossen, also kompakt. Daher gibt es eine natürliche Zahl $k_{n+1} > k_n$ und eine Abbildung $t: \{k_n + 1,\ldots,k_{n+1}\} \longrightarrow I$ mit

$$\overline{X}_{n+1} \setminus W_n \subset \bigcup_{m=k_n+1}^{k_{n+1}} U_{t(m)} \quad .$$

Für $m = k_n+1,\ldots,k_{n+1}$ sei

$$V_m := U_{t(m)} \cap (X_{n+2} \setminus \overline{X}_n) \quad ,$$

woraus (ii) folgt. Es gilt

$$\overline{X}_{n+1} \setminus W_n \subset \bigcup_{m=k_n+1}^{k_{n+1}} V_m \subset X_{n+2} \setminus \overline{X}_n$$

und daher ist

$$\overline{X}_{n+1} \subset \bigcup_{m=1}^{k_{n+1}} V_m \subset X_{n+2} \quad .$$

2) Konstruktion von Θ.

Weil $X_n = \bigcup_{m=1}^{k_n} (X_n \cap V_m)$ ist, gibt es nach Hilfssatz 5 eine offene Umgebung θ^n der Nullschnittfläche von $A(F) | X_n$ mit $\theta^n | V_m \subset \Theta_{t(m)} | V_m$ für $m=1,\ldots,k_n$. Es sei

$$\Theta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta^n \quad .$$

Nach der Eigenschaft (ii) der Überdeckung (V_m) gilt

$\theta^n | V_m \subset A(F) | X_n \cap V_m = \emptyset$ für $m > k_n$.

q. e. d.

Unter Anwendung von Hilfssatz 4 und Hilfssatz 6 läßt sich die folgende Lokalitätsaussage zeigen:

Satz 6.

Eine Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_\alpha$ ist genau dann global eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$, wenn sie lokal eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$ ist, d. h., wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $\mathcal{K}|U$ eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha|U$ ist. Ferner ist eine Untergarbe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}_\omega$ bzw. $\mathcal{F}_c$ genau dann eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe bzw. eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe, wenn $\mathcal{K}$ diese Eigenschaften lokal besitzt.

Beweis: Die lokalen Eigenschaften folgen trivialerweise aus den globalen. Es sei also $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X durch offene Teilmengen U_i derart, daß es über U_i eine Untergarbe $\mathcal{R}_i$ von $\mathcal{A}_\alpha|U_i$ und eine offene Umgebung $\Theta_i \subset \Theta_0|U_i$ der Nullschnittfläche von $A(F)|U_i$ gibt, so daß $\mathcal{K}|U_i$ durch $\mathcal{R}_i$ erzeugt wird mittels Θ_i. Nachzuweisen ist die Existenz einer Untergarbe $\mathcal{R}$ von $\mathcal{A}_\alpha$ und eine zugeordnete offene Umgebung Θ der Nullschnittfläche von A(F), so daß $\mathcal{K}$ durch $\mathcal{R}$ mittels Θ erzeugt wird.

Für $U \subset X$ offen sei

$$\mathcal{R}(U) := \{ a \in \mathcal{A}_\alpha(U) : a|U \cap U_i \in \mathcal{R}_i(U \cap U_i) \text{ für alle } i \in I \} .$$

Dann ist $\mathcal{R}$ eine Untergarbe von $\mathcal{A}_\alpha$. Es sei $i,j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Für jede offene Teilmenge U von $U_i \cap U_j$ ist

$$\mathcal{R}_i(U)_{\Theta_i \cap \Theta_j} = \mathrm{Exp}^{-1}(\mathcal{K}(U)_{\Lambda_i \cap \Lambda_j}) = \mathcal{R}_j(U)_{\Theta_i \cap \Theta_j} ,$$

woraus nach Hilfssatz 4 $\mathcal{R}_i(U) = \mathcal{R}_j(U)$ folgt; dabei ist

$\Lambda_i := \exp \Theta_i$ für alle $i \in I$. Daher gilt für jede offene Teilmenge U von U_i

$$(+) \qquad \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}_i(U)$$

Ohne Einschränkung kann nach Hilfssatz 6 angenommen werden, daß $(U_i)_{i \in I}$ eine trivialisierende Überdeckung von A(F) ist, derart, daß es eine offene Umgebung Θ der Nullschnittfläche von A(F) mit $\Theta|U_i \subset \Theta_i$ für alle $i \in I$ gibt. Es sei $\Lambda := \exp\Theta$, also ist $\Lambda|U_i = \exp(\Theta|U_i)$ für jedes $i \in I$. Für $i \in I$ und $U \subset U_i$ offen ist dann

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{R}(U)_\Theta) = \mathrm{Exp}(\mathcal{R}_i(U)_\Theta) = \mathcal{K}(U)_\Lambda \quad .$$

Da sämtliche offenen Teilmengen aller U_i eine Basis von X bilden, folgt, daß $\mathcal{K}$ von der Garbe $\mathcal{R}$ mittels Θ erzeugt wird, d. h. $\mathcal{K}$ ist eine Liesche Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$.

Ist $\mathcal{K}$ lokal eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega$, dann ist $\mathcal{K}$ nach der obigen Gleichung (+) auch global eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe. Es sei $\mathcal{K}$ lokal eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ und U sei eine offene Teilmenge von X. Werden die Beschränkungsabbildungen $\mathcal{F}_c(U) \longrightarrow \mathcal{F}_c(U \cap U_i)$ mit r_i bezeichnet, so ist

$$\mathcal{K}(U) = \bigcap_{i \in I} r_i^{-1}(\mathcal{K}(U \cap U_i)) \quad ,$$

woraus die Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(U)$ in $\mathcal{F}_c(U)$ folgt, d. h. $\mathcal{K}$ ist global eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c$.

q. e. d.

Mit Hilfe der punktalen Homotopiebedingung [6, Satz 1] ergibt sich sofort die

Folgerung.

Es sei $\mathcal{K}_1$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}_c$; $\mathcal{K}_2$ sei eine Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega$. Das Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ist genau dann global ein zulässiges bzw. Okasches Paar von Untergarben von $(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_\omega)$, wenn es lokal ein solches ist, d. h., wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $(\mathcal{K}_1|U, \mathcal{K}_2|U)$ ein zulässiges bzw. Okasches Paar von Untergarben von $(\mathcal{F}_c|U, \mathcal{F}_\omega|U)$ ist.

Die erwähnten Isomorphie- und Lokalitätsaussagen werden für den Beweis des Hauptsatzes benötigt. Für eine Anwendung des Hauptsatzes wird ein Hilfssatz gebraucht (vgl. [6, § 2.3, Beispiel c]): Es sei $\mathcal{K}_i$, i=1,2, eine Untergarbe von $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = c$ bzw. ω, und Y sei eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X. Mit ${}^Y\mathcal{K}_i$, i=1,2, sei die Garbe der Schnitte von $\mathcal{K}_i$, die auf Y dem Einsschnitt identisch sind, bezeichnet. Dann gilt:

Hilfssatz 7.

Ist $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein zulässiges Paar mit $\mathcal{K}_1(x) = \mathcal{K}_2(x)$ für alle $x \in X$, dann ist auch $({}^Y\mathcal{K}_1, {}^Y\mathcal{K}_2)$ ein zulässiges Paar mit ${}^Y\mathcal{K}_1(x) = {}^Y\mathcal{K}_2(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Wird $\mathcal{K}_i$ von der Untergarbe $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{A}_\alpha$ erzeugt, dann wird ${}^Y\mathcal{K}_i$ von ${}^Y\mathcal{R}_i := \mathcal{R}_i \cap {}^Y\mathcal{A}_\alpha$ erzeugt. Dabei ist ${}^Y\mathcal{A}_\alpha$ die Garbe der lokalen Schnitte von A(F), die auf Y dem Nullschnitt identisch sind. Weil ${}^Y\mathcal{A}_\omega$ lokal isomorph zu der kohärenten Idealgarbe ${}^Y\mathcal{O}^n$ ist, ist ${}^Y\mathcal{A}_\omega$ kohärent. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{R}_2$ eine kohärente Untergarbe von $\mathcal{A}_\omega$, also ist ${}^Y\mathcal{R}_2$ kohärent. Die Vollständigkeit von ${}^Y\mathcal{K}_1(U)$ folgt aus der Vollständigkeit von $\mathcal{K}_1(U)$ für alle $U \subset X$ offen. Somit ist gezeigt, daß $({}^Y\mathcal{K}_1, {}^Y\mathcal{K}_2)$ ein zulässiges Paar von

Untergarben des Paares $(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_\omega)$ ist. Aus ${}^Y\mathcal{K}_2 \subset {}^Y\mathcal{K}_1$ folgt ${}^Y\mathcal{K}_2(x) \subset {}^Y\mathcal{K}_1(x)$ für alle $x \in X$; ist x ein Element der offenen Menge $X \setminus Y$, dann ist ${}^Y\mathcal{K}_1(x) \subset {}^Y\mathcal{K}_2(x)$ wegen $\mathcal{K}_1(x) \subset \mathcal{K}_2(x)$, woraus ${}^Y\mathcal{K}_1(x) = {}^Y\mathcal{K}_2(x)$ für $x \in X \setminus Y$ folgt. Für $x \in Y$ besteht ${}^Y\mathcal{K}_i(x)$ aus genau dem Einselement der Faser F_x, also ist trivialerweise ${}^Y\mathcal{K}_1(x) = {}^Y\mathcal{K}_2(x)$.

q. e. d.

Für eine Anwendung des Hauptsatzes wird ferner folgende Tatsache benutzt: Für eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit G sei $G_\alpha, \alpha=c,\omega$, die Garbe der Keime stetiger bzw. holomorpher G-wertiger Funktionen auf X. Ist G_o eine abgeschlossene komplexe Liesche Untergruppe der Lie Gruppe G, dann können $(G_o)_\alpha$ und $(A(G_o))_\alpha$ als Untergarben von G_α bzw. $(A(G))_\alpha$ aufgefaßt werden (vgl. [4, IV, § IV]). Da G_o abgeschlossen in G ist, ist $(G_o)_\alpha$ eine vollständige Untergarbe von G_α . Das Paar $((G_o)_c,(G_o)_\omega)$ ist somit ein Okasches Paar von Untergarben des Paares (G_c, G_ω). Allgemeiner noch ist nach [6, Satz 1] jedes Okasche Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ von Untergarben des Paares $((G_o)_c,(G_o)_\omega)$ auch ein Okasches Paar von Untergarben von (G_c,G_ω).

Ein weiteres Hilfsmittel zum Beweis des Hauptsatzes ist das folgende Lemma über die Einführung einer Metrik in der Garbe $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = c$ oder ω beliebig aber fest. Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von X durch abzählbar viele offene Teilmengen X_n derart, daß X_n relativ-kompakt in X_{n+1} enthalten ist. Dann gilt:

Lemma

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die topologische Gruppe $\mathcal{F}_\alpha(X_n)$ metrisierbar bezüglich einer Metrik d_n, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) d_n ist rechtsinvariant, d. h. für $M, M_1, M_2 \in \mathcal{F}_\alpha(X_n)$ gilt:

$$d_n(M_1\, M,\ M_2\, M) = d_n(M_1, M_2) \quad .$$

2) Für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n \leq n'$ sind d_n und $d_{n'}$ mit der Beschränkungsabbildung $\mathcal{F}_\alpha(X_{n'}) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha(X_n)$ verträglich, d. h. für $M, N \in \mathcal{F}_\alpha(X_{n'})$ gilt:

$$d_{n'}(M, N) \geq d_n(M|X_n, N|X_n) \quad .$$

Beweis: Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine trivialisierende Überdeckung von F mit Karten $\phi_i : F|U_i \longrightarrow U_i \times G$; für $x \in X$ sei $\phi_{i,x} : F_x \longrightarrow G$ der durch $\phi_i(f) = (x, \phi_{i,x}(f))$, $f \in F_x$, gegebene biholomorphe Isomorphismus. Zunächst wird eine rechtsinvariante Metrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$ definiert, falls X eine Partition der Eins $(p_i)_{i \in I}$ mit Indexmenge I besitzt.

1) Definition einer rechtsinvarianten Metrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$.

a) Definition einer rechtsinvarianten Metrik auf den Fasern F_x, $x \in X$.

Nach Sätzen aus der Topologie (siehe [1, IX, § 3.1, Propositione 1 und 2]) folgt, daß G eine rechtsinvariante Metrik besitzt. Diese Metrik sei mit d bezeichnet. Das Einselement in G sei e. Für alle $a \in G$ ist

$$(+) \qquad d(a,e) = d(a^{-1},e).$$

Denn es ist $d(a,e) = d(ea^{-1}, aa^{-1}) = d(a^{-1},e)$ wegen der Symmetrie und Rechtsinvarianz von d. Außerdem ist für alle $a,b \in G$

$$(++) \qquad d(ab,e) \leq d(a,e)+d(b,e),$$

da Symmetrie, Rechtsinvarianz und Dreieckseigenschaft von d er-

geben $d(ab,e) = d(e,ab) = d(b^{-1},a) \leq d(b^{-1},e)+d(e,a)$, woraus nach der Gleichung (+) die gewünschte Ungleichung folgt.

Für $x \in X$, $f \in F_x$ und e_x das Einselement der Faser F_x sei

$$d_x(f,e_x) := \sum_{i \text{ mit } x \in U_i} p_i(x)\, d(\phi_{i,x}(f),e) \quad .$$

Nach (+) und (++) und da $\phi_{i,x}$ ein Isomorphismus ist, folgen für beliebige $f, g \in F_x$

$$d_x(f,e_x) = d_x(f^{-1},e_x)$$

und

$$d_x(fg,e_x) \leq d_x(f,e_x)+d_x(g,e_x).$$

Wegen $\phi_{i,x}(e_x) = e$ und $d(e,e) = o$ ist außerdem

$$d_x(e_x,e_x) = o \quad .$$

Umgekehrt, falls $d_x(f,e_x) = o$ ist, ist $f = e_x$, denn da $(p_i)_{i \in I}$ eine Partition der Eins ist, gibt es ein $i_o \in I$ mit $p_{i_o}(x) > o$, woraus $d(\phi_{i_o,x}(f),e) = o$, also $\phi_{i_o,x}(f) = e$ und damit $f = e_x$ folgt.

Für beliebige $f,g \in F_x$ sei definiert

$$d_x(f,g) := d_x(fg^{-1},e_x)$$

Aus den obigen Überlegungen folgt

$$d_x(f,g) = d_x(fg^{-1},e_x) = d_x(gf^{-1},e_x) = d_x(g,f) \quad ,$$

d. h. d_x ist symmetrisch, und

$$d_x(f,h)+d_x(h,g)=d_x(fh^{-1},e_x)+d_x(hg^{-1},e_x) \geq d_x(fg^{-1},e_x)=d_x(f,g)$$

für $h \in F_x$, d. h. die Dreiecksungleichung gilt für d_x sowie

$$d_x(f,f) = d_x(e_x,e_x) = o$$

Außerdem folgt $fg^{-1} = e_x$ aus $d_x(f,g) = o$, also ergibt sich $f = g$. Da die Rechtsinvarianz eine sofortige Folgerung der Definition ist, denn für $f,g,h \in F_x$ gilt

$$d_x(fh,gh) = d_x(fhh^{-1}g^{-1},e_x) = d_x(fg^{-1},e_x) = d_x(f,g),$$

ist somit d_x eine rechtsinvariante Metrik auf F_x.

b) Definition einer Familie endlicher, rechtsinvarianter Pseudometriken auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$.

Es sei $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine Ausschöpfung von X durch kompakte Teilmengen K_m mit $K_m \subset K_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für beliebige $f,g \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ sei

$$\| f,g \|_{K_m} := \sup_{x \in K_m} \left(\frac{d_x(f(x),g(x))}{1+d_x(f(x),g(x))} \right) .$$

Wird der Bruch mit $d'_x(f(x),g(x))$ abgekürzt, so ist $o \leq d'_x(f(x),g(x)) < 1$, und daher existiert das Supremum. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\| f,g \|_{K_m} \leq 1$ und, da d'_x eine rechtsinvariante Metrik auf F_x ist, ist $\| \ , \ \|_{K_m}$ eine endliche rechtsinvariante Pseudometrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$. Pseudometrik deshalb, weil aus $\| f,g \|_{K_m} = o$ nur $f \mid K_m = g \mid K_m$ und nicht notwendigerweise $f = g$ folgt.

c) Definition einer rechtsinvarianten Metrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$.

Es sei für beliebige f und g aus $\mathcal{F}_\alpha(X)$

$$d'(f,g) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \| f,g \|_{K_m} .$$

Weil $o \leq \frac{1}{2^m} \| f,g \|_{K_m} \leq \frac{1}{2^m}$ ist, konvergiert die angegebene Reihe, und es ist $o \leq d'(f,g) \leq 1$. Es folgt sofort nach Schritt b, daß d' eine endliche rechtsinvariante Pseudometrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X)$ ist.

Es sei $d'(f,g) = o$ für $f,g \in \mathcal{F}_\alpha(X)$. Folgt $f = g$, dann ist d' eine Metrik. Wegen $d'(f,g) = o$ ist aber $\| f,g \|_{K_m} = o$ für alle m, denn sonst gäbe es ein N mit $\| f,g \|_{K_m} > o$ für $m \geq N$ und $\| f,g \|_{K_m} = o$ für $m < N$, woraus $\frac{1}{2^m} \| f,g \|_{K_N} \leq \frac{1}{2^m} \| f,g \|_{K_m}$ für alle $m \geq N$, also $\left(\sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{2^m} \right) \| f,g \|_{K_N} \leq d'(f,g) = o$ und damit der Widerspruch $\| f,g \|_{K_N} \leq o$ folgen würde. Daher ist $f | K_m = g | K_m$ für alle m. Weil die K_m eine Ausschöpfung von X bilden, ergibt sich $f = g$.

2) Definition einer Metrik d_n auf $\mathcal{F}_\alpha(X_n)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{X}_n$ von X_n ist kompakt, also auch parakompakt. Da $(U_i \cap \overline{X}_n)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\overline{X}_n$ ist, gibt es nach einem Satz aus der Topologie (siehe [16, § 2.11]) eine Partition der Eins $(p_i)_{i \in I}$ auf $\overline{X}_n$. Dann ist $(p_i | X_n)_{i \in I}$ eine Partition der Eins auf X_n. Es gibt nach Schritt 1 des Beweises eine rechtsinvariante Metrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung kann die kompakte Ausschöpfung $K_n^1 \subset K_n^2 \subset K_n^3 \ldots$ von X_n so gewählt werden, daß $K_n^m \subset K_{n'}^m$ für alle $n,n' \in \mathbb{N}$, $n \leq n'$, und $m \in \mathbb{N}$ gilt. Das ergibt sich, da X_n relativ-kompakt in $X_{n'}$ enthalten ist. Es sei d_n die im Schritt 1 gegebene Metrik auf $\mathcal{F}_\alpha(X_n)$, die mittels der Ausschöpfung $(K_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ von X_n definiert ist.

Die Rechtsinvarianz von d_n ist im Schnitt 1 gezeigt. Um die Verträglichkeitseigenschaft nachzuweisen, seien $n,n' \in \mathbb{N}$ mit $n \leq n'$ und $M,N \in \mathcal{F}_\alpha(X_{n'})$. Wegen $K_n^m \subset K_{n'}^m$ ist

$$\| M \mid X_n, N \mid X_n \|_{K_n^m} = \| M,N \|_{K_n^m} \leq \| M,N \|_{K_{n'}^m}$$

für jedes m, woraus

$$d_{n'}(M,\ N) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \| M,N \|_{K_{n'}^m} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \| M,N \|_{K_n^m} = d_n(M|X_n,\ N|X_n)$$

folgt.

q. e. d.

§ 7. Okasche Paare von Garben homogener Räume.

Die für die Formulierung des Hauptsatzes grundlegende Definition eines Okaschen Paares von Garben homogener Räume wird in diesem Paragraphen eingeführt. Dann wird eine für den Beweis des Hauptsatzes wichtige Eigenschaft eines solchen Paares bewiesen.

Definition 7.

Ein Okasches Paar von Garben homogener Räume über dem komplexen Raum X ist ein Septupel $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, w_i, h)$, i=1,2, bestehend aus den Garben $\mathcal{E}_i$ topologischer Räume über X, den Garben $\mathcal{K}_i$ topologischer Gruppen über X und den stetigen Garbenabbildungen $w_i: \mathcal{K}_i \times \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i$ sowie $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$, mit folgenden Eigenschaften:

1) $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, w_i)$ ist eine Garbe homogener Räume für i=1,2.

2) $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ist ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.

3) h und die Inklusion $\mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ sind mit w_1 und w_2 verträglich.

4) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $f_2 \in \mathcal{E}_2(U)$, so daß für $f_1 := h_U(f_2)$ gilt:
   a) $(\mathcal{K}_1^{f_1}|U, \mathcal{K}_2^{f_2}|U)$ ist ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.
   b) $\rho(\mathcal{K}_i|U)$ wirkt transitiv auf $\rho_{f_i}(\mathcal{E}_i|U)$ für i=1,2.

Die Eigenschaft 4a ist im folgenden Sinne zu verstehen: Es gibt wie in § 6 definierte Garben $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, über X, derart, daß $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}_c$ bzw. $\mathcal{F}_\omega$ ist, mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene

Umgebung U und ein $f_2 \in \mathcal{E}_2(U)$, so daß $(\mathcal{K}_1^{f_1}|U, \mathcal{K}_2^{f_2}|U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(\mathcal{F}_c|U, \mathcal{F}_\omega|U)$ ist.

Die Definition eines Okaschen Paares von Garben nicht-abelscher Gruppen ist in [6, § 2] gegeben. Die Eigenschaften 1 und 3 sind in § 2 erklärt. Die in den Eigenschaften 4a und 4b vorkommenden Isotropiegarben bzw. Garben der Kurven sind in Definition 5 (§ 2) bzw. Definition 6 (§ 5) erläutert.

Als Abkürzung für das Okasche Paar $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, w_i, h), i=1,2$, von Garben homogener Räume wird gelegentlich die Bezeichnung $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ benutzt.

Ist h die Inklusion, dann bedeutet die Verträglichkeitsbedingung der Eigenschaft 3, daß $w_{2,U}(M,f) = w_{1,U}(M,f)$ für alle $U \subset X$ offen, $M \in \mathcal{K}_2(U)$ und $f \in \mathcal{E}_2(U)$ ist.

Jedes Okasche Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ von Garben nicht-abelscher Gruppen kann als ein Okasches Paar von Garben homogener Räume aufgefaßt werden. Die Gruppenmultiplikationen in den Schnittmengen $\mathcal{K}_i(U)$ definieren eine Abbildung $\cdot : \mathcal{K}_i \times \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{K}_i$, durch die $(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i, \cdot)$ eine Garbe homogener Räume wird. Es ist $\mathcal{K}_{i,x} \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ wegen der Existenz des Einsschnittes von $\mathcal{K}_i(X)$. Die Garbe $\rho(\mathcal{K}_i)$ wirkt auf sich selber transitiv. Die Isotropiegarbe $\mathcal{K}_i^1$ von dem Einsschnitt in $\mathcal{K}_i$ ist die Einsgarbe; daher ist $(\mathcal{K}_1^1, \mathcal{K}_2^1)$ trivialerweise ein Okasches Paar.

Mit $\llcorner : \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ sei die Inklusion bezeichnet. Dann ist $(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i, \cdot, \llcorner), i=1,2$, ein Okasches Paar von Garben homogener Räume.

Nicht triviale Beispiele Okascher Paare von Garben homogener Räume werden in Kapitel IV angegeben.

Mit Hilfe der im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Isomorphie- und Lokalitätsaussagen (Satz 5 bzw. Satz 6) folgt der

Satz 7.

Es sei $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot, h)$, i=1,2, ein Okasches Paar von Garben homogener Räume über dem komplexen Raum X. Ferner seien $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, die durch die Eigenschaft 4a von Definition 7 gegebenen Garben. Dann gilt für jede offene Teilmenge U von X und jedes $g_i \in \mathcal{E}_i(U)$, i=1 oder 2:

a) $\mathcal{K}_i^{g_i}|U$ ist für i=1 eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c|U$ und für i=2 eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega|U$.

b) $\rho(\mathcal{K}_i|U)$ wirkt transitiv auf $\rho_{g_i}(\mathcal{E}_i|U)$.

Ferner gilt für jedes $g_2 \in \mathcal{E}_2(U)$ und $g_1 := h_U(g_2)$:

a') $(\mathcal{K}_1^{g_1}|U, \mathcal{K}_2^{g_2}|U)$ ist ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.

Beweis: Für festes i sei ein Schnitt $g = g_i$ von $\mathcal{E}_i$ über $U \subset X$ offen gegeben. Nach den Eigenschaften 1 und 4a der Definition 7 gibt es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von U derart, daß es für jedes $j \in J$ Schnitte $f_j \in \mathcal{E}_i(U_j)$ und $M_j \in \mathcal{K}_i(U_j)$ mit $M_j \cdot f_j = g$ über U_j gibt, so daß $\mathcal{K}_i^{f_j}|U_j$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_c|U_j$(i=1) bzw. eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega|U_j$(i=2) für alle $j \in J$ ist.

Für jedes $j \in J$ wird ein Prägarbenisomorphismus definiert:

$$\mathcal{K}_i^{f_j}|U_j \longrightarrow \mathcal{K}_i^{g}|U_j \ , \ M \longmapsto M_j \, M \, M_j^{-1}$$

Nach Satz 5 folgt, daß $\mathcal{K}_i^{g}|U_j$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe

von $\mathcal{F}_c|U_j(i=1)$ bzw. eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $\mathcal{F}_\omega|U_j(i=2)$ für jedes $j \in J$ ist. Satz 6 ergibt Teil a der Behauptung. Teil a' folgt sofort aus den Folgerungen zu den Sätzen 5 und 6.

$\rho(\mathcal{K}_i|U)$ wirkt transitiv auf $\rho_{g_i}(\mathcal{E}_i|U)$ wegen der Eigenschaften 1 und 4b von Definition 7.

q. e. d.

Für ein Okasches Paar $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ von Garben homogener Räume bilden sowohl die Wirkungsgarben $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ als auch die durch jeden Schnitt g von $\mathcal{E}_2$ induzierten Isotropiegarben $(\mathcal{K}_1^{g_1}, \mathcal{K}_2^{g})$, $g_1 := h(g)$, ein Okasches Paar von Garben nichtabelscher Gruppen. Außerdem ist sowohl $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot)$ als auch $(\rho_{g_i}(\mathcal{E}_i), \rho(\mathcal{K}_i), \cdot)$, $i=1,2$, $g_2 = g$, eine Garbe homogener Räume.

§ 8. Formulierung und Beweis des Hauptsatzes.

Hauptsatz.

Wenn $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume über dem Steinschen Raum X ist, dann ist die induzierte Abbildung

$$h' : \Pi(X, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_1)$$

bijektiv.

Beweis: Es sei $(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}_i, \cdot, h), i=1,2$, ein Okasches Paar von Garben homogener Räume über dem Steinschen Raum X.

1) Injektivität von h'.

Es sei ein Schnitt $f \in \mathcal{E}_2(X)$ gegeben. Da X Steinsch ist, sind nach Satz 7 die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt. Daher ist das folgende Diagramm kommutativ mit exakten Zeilen, wobei $k: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ die Inklusion ist; die anderen Bezeichnungen seien wie in Satz 4.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Pi(X, \mathcal{K}_2^f) & \xrightarrow{\iota_2'} & \Pi(X, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\psi_f'} & \Pi(X, \mathcal{E}_2) & \xrightarrow{\delta_2'} & H^1(X, \mathcal{K}_2^f) & \xrightarrow{\iota_{2,*}} & H^1(X, \mathcal{K}_2) \\
\downarrow{\scriptstyle (k^f)'} & & \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle k_*^f} & & \downarrow{\scriptstyle k_*} \\
\Pi(X, \mathcal{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\iota_1'} & \Pi(X, \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\psi_{f_1}'} & \Pi(X, \mathcal{E}_1) & \xrightarrow{\delta_1'} & H^1(X, \mathcal{K}_1^{f_1}) & \xrightarrow{\iota_{1,*}} & H^1(X, \mathcal{K}_1)
\end{array}$$

Das Fünfer-Lemma aus § 3 ist auf dieses Diagramm anwendbar, wie jetzt gezeigt wird: Nach Satz 7 ist $(\mathcal{K}_1^{f_1}, \mathcal{K}_2^f)$ ein Okasches Paar; das gleiche gilt nach Definition 7 für $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$. Weil X Steinsch ist, ergeben die Homotopie- und Cohomologieeigenschaften von Okaschen Paaren (siehe [6, § 2]) die Bijektivität der Abbildunge

$(k^f)'$, k', k_*^f, und k_*. Da k_*^f und k_* das ausgezeichnete Element des Urbildes in das ausgezeichnete Element des Bildes überführen, folgt aus ihrer Injektivität, daß der Kern dieser Abbildungen genau aus jeweils dem ausgezeichneten Element der entsprechenden ersten Cohomologiemenge besteht. Weil h und k mit den Abbildungen „$\cdot$" verträglich sind, sind h' und k' mit den induzierten Wirkungsabbildungen $\cdot : \Pi(X,\mathcal{K}_i) \times \Pi(X,\mathcal{E}_i) \longrightarrow \Pi(X,\mathcal{E}_i)$ verträglich, wie aus ihren Definitionen (siehe § 5) sofort zu folgern ist.

Aus dem Fünfer-Lemma ergibt sich, daß der Kern von h' aus der Homotopieklasse von f besteht. Daher ist jeder Schnitt $g \in \mathcal{E}_2(X)$, dessen Bild $h_X(g)$ zu $h_X(f)$ in $\mathcal{E}_1(X)$ homotop ist, selber zu f in $\mathcal{E}_2(X)$ homotop, d. h. h' ist injektiv.

2) Surjektivität von h'.

Eine bedingte Surjektivitätsaussage, nämlich die Surjektivität von h' unter Voraussetzung der Existenz eines Schnittes aus $\mathcal{E}_2(X)$, folgt sofort aus dem Fünfer-Lemma. Jetzt ist zum Nachweis der Surjektivität von h' zu zeigen, daß es unter der Voraussetzung eines Schnittes aus $\mathcal{E}_1(X)$ einen Schnitt aus $\mathcal{E}_2(X)$ gibt. Ein Schnitt $f_1 \in \mathcal{E}_1(X)$ sei gegeben.

Konstruktion eines Schnittes aus $\mathcal{E}_2(X)$.

Da $\mathcal{E}_{2,x} \neq \emptyset$ für jedes $x \in X$ ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Steinsche Umgebung, über der ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ existiert. Um einen globalen Schnitt zu konstruieren, wird die folgende , später bewiesene Hilfsaussage eingeführt.

Heftungsaussage.

> Es seien X_1 und X_2 offene Steinsche Teilmengen von X, so daß $X_1 \cup X_2$ Steinsch ist. Über jedem X_i existiere ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$. Dann gibt es auch über $X_1 \cup X_2$ einen Schnitt von $\mathcal{E}_2$.

Jeder analytische Quader Q in X besitzt eine offene Umgebung, über der ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ existiert. Denn Q kann in endlich viele heftbare analytische Quader Q_n unterteilt werden. Die Q_n können so klein gewählt sein, daß es eine offene Steinsche Umgebung U_n von Q_n gibt, so daß ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ über U_n existiert und $U_n \cup U_{n+1}$ Steinsch ist (siehe [6, § 4. 3]). Die Vereinigung der U_n ist dann eine Umgebung von Q, über der nach der Heftungsaussage ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ existiert.

Als Steinscher Raum kann X durch eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Rungeschen Teilmengen X_n derart ausgeschöpft werden, daß jedes X_n relativ-kompakt in X_{n+1} enthalten ist. Da jede relativ-kompakte Teilmenge von X in einem analytischen Quader enthalten ist, gibt es über jedem X_n einen Schnitt von $\mathcal{E}_2$.

Die Existenz eines globalen Schnittes von $\mathcal{E}_2$ folgt nach dem Garbenaxiom (G2) sofort aus der später zu beweisenden

Konverggerzaussage.

> Über jedem X_n existiere ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Schnitten g_n aus $\mathcal{E}_2(X_n)$, bei denen für jedes feste $m\in\mathbb{N}$ die Folge $(g_n|X_m)_{n\geq m}$ in $\mathcal{E}_2(X_m)$ gegen einen Schnitt g^m konvergiert und für die gilt:

$g^m | X_k = g^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$.

Es bleibt also, die Gültigkeit der Heftungs- und Konvergenzaussage unter Voraussetzung eines Schnittes f_1 aus $\mathcal{E}_1(X)$ zu zeigen. Dazu wird die folgende Bemerkung benutzt.

Die bedingte Surjektivitätsaussage, die am Anfang von Schritt 2 erwähnt wurde, sowie die im Schnitt 1 bewiesene Injektivitätsaussage bleiben richtig, wenn X durch eine offene Steinsche Teilmenge U ersetzt wird, d. h. es gilt:

Für alle offenen Steinschen Teilmengen U von X ist die durch $h: \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ induzierte Abbildung

(*) $$\Pi(U, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \Pi(U, \mathcal{E}_1)$$

injektiv. Sie ist außerdem surjektiv, wenn ein Element von $\mathcal{E}_2(U)$ existiert.

a) Beweis der Heftungsaussage.
Nach Voraussetzung ist X_i, i=1,2, eine offene Steinsche Teilmenge von X, über der ein Schnitt von $\mathcal{E}_2$ existiert. Nach der Surjektivitätsaussage (*) gibt es unter der oben gegebenen Voraussetzung eines Schnittes $f_1 \in \mathcal{E}_1(X)$ Schnitte $g_i' \in \mathcal{E}_2(X_i)$ mit

$$h_{X_i}(g_i') \sim f_1 | X_i$$

in $\mathcal{E}_1(X_i)$, i=1,2. Im allgemein stimmen die Schnitte g_i' auf dem Durchschnitt $X_{12} := X_1 \cap X_2$ nicht überein. Es wird jedoch gezeigt, daß die Schnitte g_i' zu Schnitten $g_i \in \mathcal{E}_2(X_i)$ mit $g_1 = g_2$ über X_{12} homotop sind. Dann folgt die Existenz eines Schnittes von $\mathcal{E}_2(X_1 \cup X_2)$ aus dem Garbenaxiom (G2).

Da die Beschränkungsabbildungen der Garbe $\mathcal{E}_1$ stetig sind, ergibt sich aus der obigen Homotopierelation, daß

$$h_{X_1}(g_i') \mid X_{12} \sim f_1 \mid X_{12}$$

in $\mathcal{E}_1(X_{12})$ für i=1,2, ist. Aus der Verträglichkeit der Garbenabbildung h mit den Beschränkungsabbildungen folgt

$$h_{X_{12}}(g_1' \mid X_{12}) \sim h_{X_{12}}(g_2' \mid X_{12})$$

in $\mathcal{E}_1(X_{12})$. Daher gilt in $\mathcal{E}_2(X_{12})$

$$g_1' \mid X_{12} \sim g_2' \mid X_{12}$$

nach der Injektivitätsaussage (*). Diese Aussage ist anwendbar, da X_{12} als Durchschnitt zweier Steinscher Teilmengen von X selber Steinsch ist.

Mit Hilfe von Satz 7 ergibt die Folgerung zu Satz 2 die Existenz eines einshomotopen Schnittes M aus $\mathcal{K}_2(X_{12})$ mit

$$M \cdot g_2' = g_1' \qquad \text{über } X_{12} \quad .$$

Es sei die Homotopie, die M mit dem Einsschnitt von $\mathcal{K}_2(X_{12})$ verbindet, mit φ_{12} bezeichnet. Dann ist $\varphi_{12}: I \longrightarrow \mathcal{K}_2(X_{12})$ ein Element der Gruppe $\rho(\mathcal{K}_2)(X_{12})$. Die Abbildung $\varphi_{ii}: I \longrightarrow \mathcal{K}_2(X_i)$ sei konstant gleich dem Einsschnitt von $\mathcal{K}_2(X_i)$ für i=1,2, und es sei $\varphi_{21} := \varphi_{12}^{-1}$. Dann ist $\varphi := (\varphi_{ij})_{i,j=1,2}$ ein $\mathcal{U}$-Cozyklus mit Werten in $\rho(\mathcal{K}_2 \mid X_1 \cup X_2)$, wobei $\mathcal{U} = (X_1, X_2)$ ist.

Da $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein Okasches Paar von Garben über X bildet, ist $(\mathcal{K}_1 \mid X_1 \cup X_2, \mathcal{K}_2 \mid X_1 \cup X_2)$ ein Okasches Paar von Garben über $X_1 \cup X_2$; nach Voraussetzung ist $X_1 \cup X_2$ Steinsch. Daher ist nach einem Satz aus der Theorie der Okaschen Paare [6, § 5, Zusatz zu Satz 2]

$$H^1(X_1 \cup X_2,\ \rho(\mathcal{K}_2 | X_1 \cup X_2)) = 1 \quad ,$$

woraus folgt, daß φ cohomolog dem $\mathcal{U}$-Cozyklus mit Werten in $\rho(\mathcal{K}_2 | X_1 \cup X_2)$, der sich aus den Einselementen der Schnittmengen dieser Garbe ergibt, ist. Daraus ergeben sich Elemente $\varphi_i \in \rho(\mathcal{K}_2)(X_i)$ mit $\varphi_{12} = \varphi_1^{-1}\ \varphi_2$ über X_{12}. Es sei $M_i := \varphi_i(1), i=1,2$. Dann ist $M_i \in \mathcal{K}_2(X_i)$ mit $M = M_1^{-1}\ M_2$ über X_{12}. Es sei

$$g_i := M_i \cdot g_i' \quad , \quad i=1,2.$$

Dann ist $g_i \in \mathcal{E}_2(X_i)$ und über X_{12} ist $g_1 = g_2$, woraus die Gültigkeit des Heftungslemmas folgt.

b) Beweis der Konvergenzaussage.

Nach Voraussetzung gibt es einen Schnitt $f_1 \in \mathcal{E}_1(X)$ und es ist $\mathcal{E}_2(X_n) \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X_n Steinsch ist, gibt es nach der obigen Surjektivitätsaussage (*) Schnitte $g_n' \in \mathcal{E}_2(X_n)$, so daß in $\mathcal{E}_1(X_n)$ gilt

$$h_{X_n}(g_n') \sim f_1 | X_n$$

Die Folge $(g_n' | X_m)_{n \geq m}$ konvergiert im allgemeinen nicht. Es wird jedoch gezeigt, daß die Schnitte g_n' sich in Schnitte g_n, die der Konvergenzaussage genügen, deformieren lassen.

i) Konstruktion der Schnitte $g_n \in \mathcal{E}_2(X_n)$.

Durch Induktion werden Schnitte g_n aus $\mathcal{E}_2(X_n)$, die zu g_n' homotop sind, konstruiert. Es sei $g_1 := g_1'$. Ist g_n bekannt, so gilt in $\mathcal{E}_2(X_n)$

$$g_{n+1}' | X_n \ \sim \ g_n$$

Denn aus der in $\mathcal{E}_1(X_{n+1})$ gültigen Relation

$h_{X_{n+1}}(g'_{n+1}) \sim f_1|X_{n+1}$ folgt, daß $h_{X_n}(g'_{n+1}|X_n) \sim f_1|X_n$ in $\mathcal{E}_1(X_n)$ ist. Deshalb ist $h_{X_n}(g'_{n+1}|X_n) \sim h_{X_n}(g'_n)$, woraus sich nach der Injektivitätsaussage (*) $g'_{n+1}|X_n \sim g_n$ ergibt.

Nach Satz 7 kann die Folgerung zu Satz 2 angewendet werden. Daher existiert ein einshomotoper Schnitt $M_n \in \mathcal{K}_2(X_n)$, so daß über X_n gilt

$$(+) \qquad g_n = M_n \cdot g'_{n+1} \quad .$$

Die Homotopie φ, die M_n mit dem Einsschnitt verbindet, ist ein Element aus $\rho(\mathcal{K}_2)(X_n)$. Nach dem in § 6 gegebenen Lemma gibt es eine rechtsinvariante Metrik d_n auf $\mathcal{K}_2(X_n)$, die mit den Beschränkungsabbildungen $\mathcal{K}_2(X_n) \longrightarrow \mathcal{K}_2(X_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ verträglich ist. Die Kugelumgebung vom Radius 2^{-n} des Schnittes M_n in $\mathcal{K}_2(X_n)$ induziert eine offene Umgebung Ω von φ in $\rho(\mathcal{K}_2)(X_n)$ derart, daß $\varphi'(1)$ in dieser Kugelumgebung für alle $\varphi' \in \Omega$ liegt. Das gilt, da $\varphi: I \longrightarrow \mathcal{K}_2(X_n)$ stetig ist und die Schnittmengen der Garbe $\rho(\mathcal{K}_2)$ die Topologie der kompakten Konvergenz tragen.

Weil $X_n \subset X_{n+1}$ ein Rungesches Paar und $(\mathcal{K}_1|X_{n+1}, \mathcal{K}_2|X_{n+1})$ ein Okasches Paar sind, ist das Bild der Beschränkungsabbildung $\rho(\mathcal{K}_2)(X_{n+1}) \longrightarrow \rho(\mathcal{K}_2)(X_n)$ dicht in $\rho(\mathcal{K}_2)(X_n)$ nach [6, § 5, Zusatz zu Satz 2] . Daher enthält die Umgebung Ω von φ ein Element des Bildes der gerade erwähnten Beschränkungsabbildung, d. h. es gibt ein $\varphi' \in \rho(\mathcal{K}_2)(X_{n+1})$, so daß $\varphi'(1)|X_n$ in der bereits erwähnten Kugelumgebung von M_n liegt. Dann ist $M'_{n+1} := \varphi'(1)$ ein einshomotoper Schnitt aus $\mathcal{K}_2(X_{n+1})$ mit der Eigenschaft

$$d_n(M'_{n+1}|X_n, M_n) < 2^{-n} \quad .$$

Es sei

(++) $$g_{n+1} := M'_{n+1} \cdot g'_{n+1} \quad .$$

Dann ist g_{n+1} ein zu g'_{n+1} homotoper Schnitt aus $\mathcal{E}_2(X_{n+1})$.

ii) Konvergenz der Folge $(g_n|X_m)_{n \geq m}$ in $\mathcal{E}_2(X_m)$.
Durch sukzessives Einsetzen in den Gleichungen (++) und (+) gilt für alle $n \geq m$, wobei m eine feste natürliche Zahl ist,

(+++) $$g_n|X_m = N_n^m \cdot g'_m \quad .$$

Dabei sind N_n^m Schnitte aus $\mathcal{K}_2(X_m)$ für alle $n \geq m$, die rekursiv definiert werden: Es sei $N_m^m := M'_m$. Über X_m sei für $n \geq m$

$$N_{n+1}^m := M'_{n+1} M_n^{-1} N_n^m \quad .$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{K}_2(X_m) \longrightarrow \mathcal{E}_2(X_m)$, die jedem $N \in \mathcal{K}_2(X_m)$ den Schnitt $N \cdot g'_m$, wobei g'_m festgehalten wird, zuordnet, konvergiert die Folge $(g_n|X_m)_{n \geq m}$ in $\mathcal{E}_2(X_m)$ gegen $N^m \cdot g'_m$, falls die Folge $(N_n^m)_{n \geq m}$ in $\mathcal{K}_2(X_m)$ gegen N^m konvergiert.

Nach [6, § 2, Corollar zu Hilfssatz 1] ist die Garbe $\mathcal{K}_2$ vollständig, da $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein Okasches Paar ist, woraus nach dem in § 6 bewiesenen Lemma die Vollständigkeit des metrischen Raumes $\mathcal{K}_2(X_n)$ für alle natürlichen Zahlen n folgt. Daher konvergiert die Folge $(N_n^m)_{n \geq m}$ in $\mathcal{K}_2(X_m)$, falls sie eine Cauchy-Folge ist. Daß dieser Fall tatsächlich eintritt, wird jetzt gezeigt.

Es sei d_n für alle $n \in \mathbb{N}$ die in dem Lemma aus § 6 gegebene Metrik auf $\mathcal{K}_2(X_n)$. Wegen der Rechtsinvarianz und der Verträglichkeitsbedingung dieser Metriken sowie aus den Definitionen von N_{n+1}^m und M'_{n+1} ergeben sich für $n \geq m$

$$d_m(N^m_{n+1}\ ,\ N^m_n) = d_m(M'_{n+1}\ M_n^{-1}\ N^m_n,\ N^m_n)$$

$$= \quad d_m(M'_{n+1}|X_m,\ M_n|X_m) \leq d_n(M'_{n+1}|X_n, M_n) < 2^{-n}$$

Damit ist nach der Dreiecksungleichung für Metriken

$$d_m(N^m_{n'}, N^m_n) \leq \sum_{l=o}^{k-1} d_m(N^m_{n+l+1}, N^m_{n+1})$$

$$< \sum_{l=o}^{k-1} 2^{-(n+l)} < 2^{-n+1}$$

für alle $n', n \geq m$, wobei ohne Einschränkung $n'=n+k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. Daraus ergibt sich, daß die Folge $(N^m_n)_{n\geq m}$ eine Cauchy-Folge ist.

Als topologische Gruppe ist $\mathcal{K}_2(X_m)$ Hausdorffsch, und folgende Bezeichnung ist zulässig:

$$N^m := \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq m}} N^m_n$$

Die Folge $(g_n|X_m)_{n\geq m}$ konvergiert daher in $\mathcal{E}_2(X_m)$ gegen $N^m \cdot g'_m$. Es sei $g^m := N^m \cdot g'_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

iii) Es gilt $g^m|X_k = g^k$ für alle $k \leq m$.
Es seien $k,m \in \mathbb{N}$ mit $k < m$ gegeben. Da die Wirkungsabbildungen mit den Beschränkungsabbildungen verträglich sind, ist

$$g^m|X_k = N^m|X_k \cdot g'_m|X_k \quad .$$

Die Gleichungen (+) aus Teil i und (+++) aus Teil ii des Beweises ergeben über X_k:

$$g'_m = (M^{-1}_{m-1}\ N^k_{m-1}) \cdot g'_k \quad .$$

Über X_k ist für $k < m \leq n$

$$N_n^k = N_n^m \, M_{m-1}^{-1} \, N_{m-1}^k \quad ;$$

daher ist

$$N^k = N^m \, M_{m-1}^{-1} \, N_{m-1}^k \quad .$$

Aus den obigen Gleichungen folgt über X_k

$$N^k \cdot g_k' = N^m \cdot g_m' = g^m \quad ,$$

woraus sich $g^k = g^m$ über X_k ergibt.

q. e. d.

Die Surjektivität von h' besagt, daß für ein Okasches Paar $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ von Garben homogener Räume über dem Steinschen Raum X gilt: Jeder globale Schnitt von $\mathcal{E}_1$ kann in das Bild eines globalen Schnittes von $\mathcal{E}_2$ mittels der Abbildung h_X deformiert werden. Das bedeutet, daß es einen Schnitt von $\mathcal{E}_2$ über X genau dann gibt, wenn ein Schnitt von $\mathcal{E}_1$ über X existiert.

IV. Folgerungen und Anwendungen des Hauptsatzes.

Der Hauptsatz dieser Arbeit, der eine Verallgemeinerung der in der Einleitung angegebenen Grauertschen Homotopieaussage darstellt - wie in § 9 gezeigt wird - erweitert die Möglichkeit, einige globale Eigenschaften einer Garbe auf gleiche Eigenschaften einer zweiten, einfacher definierten Garbe zurückzuführen.

Um diese Erweiterung auszudehnen, wird in § 10 ein holomorphes Faserbündel E mit homogener Faser, das sich von den üblichen [23, 16, 17] Faserbündeln durch die Eliminierung des Begriffs der Strukturgruppe vereinfachend unterscheidet, eingeführt. In diesem Faserbündel sind die von Ramspott [20] verwendeten Faserbündel enthalten, wie in § 11 gezeigt wird. Unter Verwendung des Hauptsatzes ergibt sich (§ 10) für solche Faserbündel E über einem Steinschen Raum folgendes Okasche Prinzip: E besitzt genau dann einen holomorphen Schnitt, wenn es einen stetigen Schnitt hat; zwei holomorphe Schnitte können genau dann durch holomorphe Schnitte ineinander deformiert werden, wenn sie durch stetige Schnitte ineinander deformierbar sind.

Als Spezialfälle des Hauptsatzes ergeben sich (§ 9) die von Forster und Ramspott [6] sowie (§ 11) die von Ramspott [20] angegebenen Erweiterungen der Grauertschen Homotopieaussage. Da außerdem das Okasche Prinzip für Endromisbündel [7] in § 13 und das für Modulbasen [8] in § 14 als Spezialfälle des Hauptsatzes nachgewiesen werden, ermöglicht der Hauptsatz eine Vereinheitlichung bekannter Einzelresultate zum Okaschen Prinzip und zu der Grauertschen Homotopieaussage.

Eine weitere Anwendung des Hauptsatzes bringt § 12. Hier werden notwendige und hinreichende topologische Bedingungen angegeben, um zwei Erzeugendensysteme der Länge r bzw. s des Moduls der globalen Schnitte einer kohärenten analytischen Garbe über einem Steinschen Raum X ineinander durch eine holomorphe Matrix maximalen Ranges zu transformieren.

Der angegebene Transformationssatz löst in verallgemeinerter Form ein von Cartan 1940 aufgeworfenes Problem [2]: zwei r-tupel holomorpher Funktionen auf einem Zylindergebiet X des $\mathbb{C}^n$, die dasselbe Ideal im Ring der auf X definierten holomorphen Funktionen aufspannen, lassen sich vermutlich genau dann durch eine holomorphe invertierbare Matrix ineinander transformieren, wenn sie geeigneten topologischen Bedingungen genügen.

Diese Vermutung wurde von Forster und Ramspott 1968 in verallgemeinerter Fassung in [8] bestätigt. Die dort angegebene Lösung ergibt sich hier als ein Spezialfall des weiter verallgemeinerten Transformationssatzes, der Erzeugendensysteme verschiedener Länge behandelt.

§ 9. Grauertsche Homotopieaussage.

Der Hauptsatz enthält als triviale Spezialfälle die in der Einleitung gegebene Grauertsche Homotopieaussage sowie deren Verallgemeinerung durch Forster und Ramspott [6], wie nun gezeigt wird.

E sei ein holomorphes Faserbündel über einem Steinschen Raum X mit einer komplexen Lieschen Gruppe als Faser (siehe [6]). Das Paar $(\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_\omega)$ der Garben der stetigen bzw. holomorphen Schnitte von E ist trivialerweise ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen, also auch von homogenen Räumen (siehe § 7). Aus dem Hauptsatz folgt sofort die Grauertsche Homotopieaussage, daß die natürliche Abbildung $\Pi(X, \mathcal{E}_\omega) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_c)$ bijektiv ist.

Wenn ein zulässiges Paar $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ von Untergarben des Paares $(\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_\omega)$ der in § 6 aufgeführten punktalen Homotopiebedingung genügt, dann ist es nach [6, Satz 1] trivialerweise ein Okasches Paar von Garben homogener Räume. Aus dem Hauptsatz ergibt sich dann die von Forster und Ramspott in [6] gegebene Verallgemeinerung der Grauertschen Homotopieaussage: für solche Untergarben $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ von $(\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_\omega)$ ist die natürliche Abbildung $\Pi(X, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{K}_1)$ bijektiv.

§ 10. Okasches Prinzip für holomorphe Faserbündel mit homogener Faser.

In diesem Paragraphen wird die Definition eines holomorphen Faserbündels mit homogener Faser eingeführt. Dann wird bewiesen, daß sich ein Okasches Prinzip für solche Faserbündel aus dem Hauptsatz ableiten läßt.

Bevor die Definition des genannten Faserbündels angegeben wird, sei eine kurze Aufführung der für diese Definition notwendigen bekannten Begriffe vorausgeschickt.

Es sei X ein beliebiger komplexer Raum. Ein holomorpher Faserraum über X ist ein Paar (E, p), wobei E ein komplexer Raum ist und $p : E \longrightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung ist. Für $U \subset X$ sei $E|U := p^{-1}(U)$; der Teilraum $p^{-1}(x)$ ist die Faser von E über dem Punkt $x \in X$; sie sei mit E_x abgekürzt. Eine holomorphe Verknüpfung auf (E,p) ist eine fasertreue holomorphe Abbildung $m: E x_X E \longrightarrow E$ des Faserproduktes $E x_X E$ in E. Ein holomorpher bzw. stetiger Schnitt von E über einer Teilmenge U von X ist eine holomorphe bzw. stetige Abbildung $s: U \longrightarrow E$ mit $p \circ s = id_U$.

Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wenn der holomorphe Faserraum (E,p), oder kurz E, lokal isomorph zu dem trivialen Faserraum X x M ist, heißt er ein holomorphes Faserbündel mit M als Faser. In diesem Fall gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und eine fasertreue biholomorphe Abbildung $\Phi_U: E|U \longrightarrow U x M$, die eine Karte für E über U heißt. Für einen solchen Faserraum E gibt es daher zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung, über der ein holomorpher Schnitt existiert. Beispiel eines solchen Faserbündels ist das Produktbündel $(X x M, pr_X)$.

Es sei G eine komplexe Liesche Gruppe. Die Gruppenmultiplikation in G induziert in natürlicher Weise eine holomorphe Verknüpfung auf $(X \times G, pr_X)$, die mit μ bezeichnet wird. Bekanntlich (siehe [6, § 1]) ist ein holomorphes Faserbündel über X mit G als Faser ein Tripel (K, p', m), bestehend aus einem holomorphen Faserraum (K, p') über X und einer holomorphen Verknüpfung $m: K \times_X K \longrightarrow K$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und eine fasertreue biholomorphe Abbildung $\Psi_U: K|U \longrightarrow U \times G$, die mit den Verknüpfungen m und μ verträglich ist. Die Abbildung Ψ_U heißt eine Karte für (K, p', m), oder kurz K, über U. Jede Faser K_x ist eine komplexe Liesche Gruppe, die mittels der biholomorphen Abbildung $\Psi_{U,x}: K_x \longrightarrow G$, $k \longmapsto pr_G(\Psi_U(k))$, zu G isomorph ist. Das Produktbündel $(X \times G, pr_X, \mu)$ ist das einfachste Beispiel eines solchen Bündels.

Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der eine komplexe Liesche Gruppe G transitiv wirkt, dann induziert die holomorphe Wirkungsabbildung $\cdot: G \times M \longrightarrow M$ eine fasertreue holomorphe Abbildung $W: (X \times G) \times_X (X \times M) \longrightarrow X \times M$.

Definition 8.

Ein holomorphes Faserbündel über einem komplexen Raum X mit homogener Faser ist ein Tripel (E,K,w), bestehend aus einem holomorphen Faserbündel E über X mit einer komplexen Mannigfaltigkeit M als Faser, einem holomorphen Faserbündel K über X mit einer komplexen Lieschen Gruppe G, die auf M transitiv wirkt, als Faser und einer fasertreuen holomorphen Abbildung $w: K \times_X E \longrightarrow E$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und Karten Φ_U für

E und Ψ_U für K über U, die mit den Abbildungen w und W verträglich sind.

Aus der Verträglichkeitsbedingung folgt, daß für jedes $x \in X$ die Faser K_x auf der Faser E_x durch w transitiv wirkt.

Jedes holomorphe Faserbündel mit einer komplexen Lieschen Gruppe als Faser ist trivialerweise ein holomorphes Faserbündel mit homogener Faser.

Zum Beweis des folgenden Satzes wird eine Aussage herangezogen nach der ein homogener Raum $(M, G, \cdot)$, wobei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und G eine komplexe Liesche Gruppe ist, die folgende Eigenschaft besitzt:

(*) Zu jedem $y \in M$ gibt es eine offene Umgebung V und eine holomorphe Abbildung $r: V \longrightarrow G$ mit $r(y') \cdot y_o = y'$ für alle $y' \in V$.

Dabei ist y_o ein beliebiger Punkt aus M. Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ergibt sich aus folgendem: die komplexe Mannigfaltigkeit M ist der Quotient der komplexen Lieschen Gruppe G nach der abgeschlossenen komplexen Untergruppe $G_o := \{g \in G: g \cdot y_o = y_o\}$; die kanonische Projektion $G \longrightarrow G/G_o$ besitzt nach [16, § 3, Satz 3.4.3] einen lokalen holomorphen Schnitt.

Mit Hilfe des Hauptsatzes kann jetzt gezeigt werden, daß für ein holomorphes Faserbündel (E,K,w), oder kurz E, gilt: die natürliche Abbildung zwischen den Mengen der Homotopieklassen der globalen stetigen bzw. holomorphen Schnitte von E ist bijektiv. Diese Aussage wird im folgenden für den verschärften Begriff der relativen Homotopie bewiesen.

Es sei Y eine analytische Teilmenge von X und f sei ein holomorpher Schnitt von E über Y. Die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten von E, die auf Y mit f übereinstimmen, sei mit ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}$ bezeichnet. Die Beschränkungsabbildungen sind die gewöhnliche Beschränkung einer Abbildung auf eine Teilmenge des Definitionsbereiches. Sind die Schnitte stetig, so wird die Garbe ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{c}$ genannt. Die Schnittmengen der Garben ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}$ und ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{c}$ seien mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen.

SATZ 8.

Es sei E ein holomorphes Faserbündel über dem Steinschen Raum X mit homogener Faser. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\Gamma(X, {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}) \longrightarrow \Gamma(X, {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{c})$$

bijektiv.

Beweis: Es sei ein holomorphes Faserbündel (E,K,w) über dem Steinschen Raum X mit homogener Faser gegeben. Mit ${}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}$, $\alpha = c,\omega$, sei die Garbe der Keime von stetigen bzw. holomorphen Schnitten von K, die auf Y mit dem Einsschnitt identisch sind, bezeichnet. Die Schnittmengen sollen die Topologie der kompakten Konvergenz tragen, wodurch ${}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}$ zu einer Garbe von topologischen Gruppen wird.

Es wird gezeigt, daß die Abbildung $w: K \times_X E \longrightarrow E$ Garbenabbildungen $w_\alpha : {}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha} \times {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\alpha} \longrightarrow {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\alpha}$, $\alpha = c,\omega$, induziert, derart, daß $({}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\alpha}, {}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}, w_\alpha, \llcorner)$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist; dabei bezeichnet $\llcorner$ die Inklusionsabbildung ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega} \longrightarrow {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{c}$. Dann ist Satz 8 eine direkte Folgerung des Hauptsatzes.

Das Garbenpaar $({}^{Y}\mathcal{K}_{c}, {}^{Y}\mathcal{K}_{\omega})$ ist nach Hilfssatz 7 ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.

1) Definition der Garbenabbildung w_α: ${}^Y\mathcal{K}_\alpha \times {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha$.
Für alle offenen Teilmengen U von X sei die Abbildung
$w_{\alpha,U}$: ${}^Y\mathcal{K}_\alpha(U) \times {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U) \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$ gegeben durch $(g,m) \longmapsto g\cdot m$, wobei $(g\cdot m)(x) := w(g(x), m(x))$ für alle $x \in U$ ist. Weil $w: K \times_X E \longrightarrow E$ fasertreu und holomorph ist, ist $g\cdot m \in \mathcal{E}_\alpha(U)$; da K_x auf E_x mittels w wirkt, ist sogar $g\cdot m \in {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$.

Trivialerweise ist $w_{\alpha,U}$ stetig und mit den Beschränkungsabbildungen verträglich, d. h. w_α: ${}^Y\mathcal{K}_\alpha \times {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha$ ist eine Garbenabbildung für $\alpha = c, \omega$. Ferner sind die Inklusionsabbildungen ${}^Y_f\mathcal{E}_\omega \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_c$ und ${}^Y\mathcal{K}_\omega \longrightarrow {}^Y\mathcal{K}_c$ mit w_c und w_ω verträglich.

2) $({}^Y_f\mathcal{E}_\alpha, {}^Y\mathcal{K}_\alpha, w_\alpha)$ ist eine Garbe von homogenen Räumen.
Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar, daß die Garbe ${}^Y\mathcal{K}_\alpha$ auf ${}^Y_f\mathcal{E}_\alpha$ durch w_α wirkt. Es muß also nur die Transitivität dieser Wirkungsabbildung nachgewiesen werden.

Es sei x_o ein beliebiger Punkt aus X und U sei eine offene Umgebung von x_o. Schnitte $m_i \in {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$, $i = 1,2$, seien gegeben. Es werden eine offene Umgebung $U' \subset U$ von x_o und ein Schnitt $g \in {}^Y\mathcal{K}_\alpha(U')$ mit $g\cdot m_1 = m_2$ über U' konstruiert.

Ohne Einschränkung kann U so klein gewählt werden, daß es Karten Φ für E und Ψ für K über U gibt, die mit w und W verträglich sind (siehe Definition 8). Es sei $m_i' := pr_M \cdot \Phi \cdot m_i$, d. h.

$$m_i' : U \xrightarrow{m_i} E|U \xrightarrow{\Phi} U \times M \xrightarrow{pr_M} M .$$

Dann gilt $\Phi(m_i(x)) = (x, m_i'(x))$ für alle $x \in U$ und es ist $m_i'|Y = f'$, wobei $f' := pr_M \cdot \Phi \cdot f|U$ die durch f induzierte holomorphe Abbildung von $U \cap Y$ in M ist.

Weil die Schnitte m_i' stetig sind, gibt es nach der oben erwähnten Eigenschaft (*) des homogenen Raumes $(M,G,\cdot)$ Umgebungen $U_i \subset U$ von x_o in X und V_i von $m_i'(x_o)$ in M sowie holomorphe Abbildungen $r_i: V_i \longrightarrow G$ mit $r_i(y)\cdot y_o = y$ für alle $y \in V_i$, so daß $m_i'(U_i) \subset V_i$ ist. Dabei ist y_o der in (*) vorkommende Punkt aus M.

Es sei $g_i' := r_i \circ m_i' | U_i$. Dann ist g_i' eine Abbildung von U_i in G und es gilt

$$g_i'(x)\cdot y_o = r_i(m_i'(x))\cdot y_o = m_i'(x)$$

für alle $x \in U_i$.

Es sei $g' := g_2'(g_1')^{-1}$ über $U' := U_1 \cap U_2$. Für die Abbildung $g': U' \longrightarrow G$ gilt $g'g_1' = g_2'$, woraus

$$g'\cdot m_1' = m_2'$$

folgt, denn wegen der eben angeführten Gleichung und der Wirkungsoperation von G auf M ist

$$g'(x)\cdot m_1'(x) = g'(x)\cdot(g_1'(x)\cdot y_o) = (g'(x)g_1'(x))\cdot y_o$$
$$= g_2'(x)\cdot y_o = m_2'(x) \text{ für alle } x \in U'.$$

Es sei $g := \Psi^{-1} \circ (id_U, xg')$. Für die Abbildung $g: U' \longrightarrow K|U'$ gilt $g \in \mathfrak{K}(U')$. Es ist $\Psi(g(x)) = (x, g'(x))$ für alle $x \in U'$. Weil die Karten Φ und Ψ mit w und W verträglich sind (vgl. Definition 8) folgt aus den obigen Bemerkungen und der Definition von W, daß für jedes $x \in U'$

$$w(g(x), m_1(x)) = \Phi^{-1}(W(\Psi(g(x)), \Phi(m_1(x))))$$
$$= \Phi^{-1}(x, g'(x)\cdot m_1'(x))$$
$$= \Phi^{-1}(x, m_2'(x)) = m_2(x)$$

ist; also ist $g\cdot m_1 = m_2$ über U'.

Es muß noch gezeigt werden, daß $g|Y$ gleich dem Einsschnitt ist. Für den Fall, daß x_0 nicht aus Y ist, d. h. für den Fall, daß x_0 ein Punkt aus der offenen Menge $X \setminus Y$ ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $U' \subset X \setminus Y$ ist, womit trivialerweise $g \in {}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}(U')$ folgt.

Es sei $x_0 \in Y$. Dann ist $m_i(x_0)=f(x_0)$ und daher ist $m_i'(x_0)=f'(x_0)$ für i=1,2. Ohne Einschränkung ist $V_1 = V_2 =: V$ und $r_1 = r_2 =: r$, also ist $g_i' = r \cdot m_i'$ für $i = 1,2$. Wegen $m_i'|Y = f'$ ist dann $g_1'|Y = g_2'|Y$, woraus für alle $x \in Y$, $g'(x)$ gleich dem Einselement von G folgt. Da $\Psi_x : K_x \longrightarrow G$ ein Isomorphismus ist, ist dann $g \in {}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}(U')$.

Damit ist gezeigt, daß $({}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\alpha}, {}^{Y}\mathcal{K}_{\alpha}, w_{\alpha})$ eine Garbe von homogenen Räumen für $\alpha = c, \omega$ ist.

3) Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $m \in {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}(U)$, so daß $({}^{Y}\mathcal{K}^{m}_{c}|U, {}^{Y}\mathcal{K}^{m}_{\omega}|U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(\mathcal{K}_c|U, \mathcal{K}_{\omega}|U)$ ist.

Es sei $x_0 \in X$. Da ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega,x_0} \neq \emptyset$ ist, gibt es eine Umgebung U' von x_0 und einen Schnitt $m \in {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}(U')$. Ohne Einschränkung ist U' so klein, daß es Karten Φ für E und Ψ für K über U' gibt, die der Verträglichkeitsbedingung aus Definition 8 genügen. Es sei $m' := pr_M \circ \Phi \circ m$.

Da die Abbildung $m' : U' \longrightarrow M$ stetig ist, gibt es nach der Eigenschaft (*) des homogenen Raumes (M, G, $\cdot$) Umgebungen $U \subset U'$ von x_0 in X und V von $m'(x_0)$ in M sowie eine holomorphe Abbildung $r: V \longrightarrow G$ mit $r(y) \cdot y_0 = y$ für alle $y \in V$, so daß $m'(U) \subset V$ ist.

Es sei $g := \Phi^{-1} \circ (id_U x g')$, wobei $g' := r \circ m' | U$ ist. Außerdem sei $Y_o := \Phi^{-1} \circ (id_U x y_o)$. Für die Schnitte $g \in \mathcal{K}_\omega(U)$ und $Y_o \in \mathcal{E}_\omega(U)$ gilt $g \cdot Y_o = m$, also wird ein Prägarbenisomorphismus durch die Zuordnung

$$\mathcal{K}_\alpha^{Y_o} | U \longrightarrow \mathcal{K}_\alpha^{m} | U, \quad k \longmapsto g\, k\, g^{-1}$$

gegeben.

Es wird gezeigt, daß $(\mathcal{K}_c^{Y_o} | U, \mathcal{K}_\omega^{Y_o} | U)$ ein zulässiges Paar von Untergarben des Paares $(\mathcal{K}_c | U, \mathcal{K}_\omega | U)$ ist und daß $\mathcal{K}_c^{Y_o}(x) = \mathcal{K}_\omega^{Y_o}(x)$ für alle $x \in U$ gilt. Daraus folgt nach Hilfssatz 7 und der Folgerung zu Satz 1 $(\mathcal{K}_c^{Y_m} | U, \mathcal{K}_\omega^{Y_m} | U)$ ist ein Okasches Paar von Untergarben von $(\mathcal{K}_c | U, \mathcal{K}_\omega | U)$

Für $k \in \mathcal{K}_\alpha(U'')$, $U'' \subset U$ offen, gilt wegen der Verträglichkeitsbedingung der Karten Φ und Ψ, daß $k \cdot Y_o = Y_o$ genau dann gilt, wenn $\Psi_x(k(x)) \in G_o$ für alle $x \in U''$ ist, d. h. es ist

$$\mathcal{K}_\alpha^{Y_o}(U'') = \left\{ k \in \mathcal{K}_\alpha(U''): \operatorname{pr}_G \circ \Psi \circ k \in (G_o)_\alpha(U'') \right\}.$$

Dabei ist G_o die Isotropiegruppe von $y_o \in M$ in G.

Es sei $A(K)$ das zu K assoziierte Faserbündel mit $A(G)$ als Faser (vgl. [15, II.3.b]). Weiter sei $\tilde{\Psi}: A(K)|U \longrightarrow U \times A(G)$ die zu Ψ assoziierte Karte von $A(K)$ über U. Mit $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, sei die Garbe der lokalen stetigen bzw. holomorphen Schnitte von $A(K)$ bezeichnet. Eine Untergarbe $\mathcal{A}'_\alpha$ vom $\mathcal{A}_\alpha | U$ wird definiert: Für $U'' \subset U$ offen sei

$$\mathcal{A}'_\alpha(U'') := \left\{ a \in \mathcal{A}_\alpha(U''): \operatorname{pr}_{A(G)} \circ \tilde{\Psi} \circ a \in (A(G_o))_\alpha(U'') \right\}.$$

Nach ihrer Definition ist die Abbildung $\exp: A(K)|U \longrightarrow K|U$ gegeben durch das kommutative Diagramm ([15, II.3.c])

$$\begin{array}{ccc} A(K)|U & \xrightarrow{\exp} & K|U \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \uparrow \Psi^{-1} \\ U \times A(G) & \xrightarrow{id \times \exp} & U \times G \end{array}$$

Weil $A(G_o)$ nach [4] als eine Unteralgebra von $A(G)$ aufgefasst werden kann, wird $A(G_o)$ durch die Abbildung $\exp: A(G) \longrightarrow G$ in G_o abgebildet, also ist

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{A}'_\alpha(U")) \subset \mathcal{K}^{Y_o}_\alpha(U") \ .$$

Es sei V_o eine offene Umgebung des Nullelements von $A(G)$, die bijektiv auf eine offene Umgebung W_e des Einselements von G durch die Exponentialabbildung abgebildet wird. Für $\Theta := \Phi^{-1}(U \times V_o)$ und $\Lambda := \exp\Theta$ ist die Abbildung $\mathrm{Exp}: \mathcal{A}_\alpha(U")_\Theta \longrightarrow \mathcal{K}_\alpha(U")_\Lambda$ bijektiv für jede offene Teilmenge $U"$ von U nach dem obigen Diagramm, da $\Lambda = \Phi^{-1}(U \times W_e)$ ist. Für $k \in \mathcal{K}_\alpha(U")_\Lambda$ ist $a := \mathrm{Exp}^{-1}(k)$ gegeben durch $a(x) = \Phi^{-1}(x, \exp^{-1}(\Psi_x(k(x))))$. Aus $\exp^{-1}(W_e \cap G_o) = V_o \cap A(G_o)$ folgt

$$\mathrm{Exp}\,(\mathcal{A}'_\alpha(U"))_\Theta = (\mathcal{K}^{Y_o}_\alpha(U"))_\Lambda \ .$$

$\mathcal{K}^{Y_o}_\alpha$ wird daher durch die Untergarbe $\mathcal{A}'_\alpha$ von $\mathcal{A}_\alpha | U$ erzeugt.

Die Abbildung $\mathcal{K}_\alpha(U") \longrightarrow \mathcal{E}_\alpha(U")$, $k \longmapsto k \cdot Y_o$, ist stetig und der Raum $\mathcal{E}_\alpha(U")$ Hausdorffsch, also bildet $\mathcal{K}^{Y_o}_\alpha(U")$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{K}_2(U")$. Weil die Garbe $\mathcal{A}'_\omega$ zu $(A(G_o))_\omega | U$ isomorph ist, ergibt sich aus dem Kohärenzsatz von Oka-Cartan (vgl. [5, § 24]), daß $\mathcal{A}'_\omega$ kohärent ist. Es folgt, daß $(\mathcal{K}^{Y_o}_c | U, \mathcal{K}^{Y_o}_\omega | U)$ ein zulässiges Paar von Untergarben des Paares $(\mathcal{K}_c | U, \mathcal{K}_\omega | U)$ ist.

Weil $\mathcal{K}^{Y_o}_\omega$ eine Untergarbe von $\mathcal{K}^{Y_o}_c$ ist, ist $\mathcal{K}^{Y_o}_\omega(x) \subset \mathcal{K}^{Y_o}_c(x)$ für alle $x \in U$. Es sei $x' \in U$ und $U"$ sei eine offene Umgebung von x' in U. Ein Schnitt $k \in \mathcal{K}^{Y_o}_c(U")$ sei gegeben. Dann ist $g_o := \Psi_{x'}(k(x')) \in G_o$. Ein Schnitt $k_o \in \mathcal{K}^{Y_o}_\omega(U)$ mit $k_o(x') = k(x')$ wird durch $k_o(x) := \Phi^{-1}(x, g_o)$ für $x \in U$ gegeben. Es folgt $\mathcal{K}^{Y_o}_c(x') \subset \mathcal{K}^{Y_o}_\omega(x')$, also ist $\mathcal{K}^{Y_o}_c(x) = \mathcal{K}^{Y_o}_\omega(x)$ für alle $x \in U$.

Damit ist gezeigt, daß $({}^{Y}\mathcal{K}^{m}_c | U, {}^{Y}\mathcal{K}^{m}_\omega | U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(\mathcal{K}_c | U, \mathcal{K}_\omega | U)$ ist.

4) Zu jedem $x_o \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $m \in {}^Y_f\mathcal{E}_\omega(U)$, so daß $\rho({}^Y\mathcal{K}_\alpha\, U)$ transitiv auf $\rho_m({}^Y_f\mathcal{E}_\alpha\, U)$ wirkt.

Da ${}^Y_f\mathcal{E}_{\omega,x_o} \neq \emptyset$ ist, genügt es, nach Hilfssatz 3 zu zeigen, daß es für jede offene Umgebung U von x_o und jede Kurve $\varphi: I \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x_o und eine Kurve $\psi: I \longrightarrow {}^Y\mathcal{K}_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\psi(t) \cdot \varphi(o) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gibt.

Eine beliebige Umgebung U von x_o sei gegeben. Die zu beweisende Aussage ist lokaler Natur, daher kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß es Karten Φ von E und Ψ von K über U gibt, die der Verträglichkeitsbedingung in Definition 8 genügen.

Eine Kurve $\varphi: I \longrightarrow {}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$ sei gegeben. ${}^Y_f\mathcal{E}_\alpha(U)$ trägt die Topologie der kompakten Konvergenz. Deshalb kann φ als eine stetige Abbildung $U \times I \longrightarrow E$ mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: jedes $(x,t) \in (U \cap Y) \times I$ wird in $f(x)$ und jedes $(x,t) \in U \times I$ in die Faser von E über x abbildet; die partielle Abbildung $U \longrightarrow E$ bei festgehaltenem $t \in I$ ist holomorph für $\alpha = \omega$.

Es sei $\varphi' := pr_M \circ \Phi \circ \varphi : U \times I \longrightarrow M$. Wegen der Eigenschaft (*) des homogenen Raumes $(M,G,\cdot)$, der Stetigkeit von φ' und der Kompaktheit von I folgt: Es gibt eine Zerlegung $o = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ von I, offene Umgebungen $U_i \subset U$ von x_o in X und V_i von $\varphi'(x_o, t_i)$ in M sowie holomorphe Abbildungen $r_i: V_i \longrightarrow G$ mit $r_i(y) \cdot y_o = y$ für alle $y \in V_i$, so daß $\varphi'(U_i \times I_i) \subset V_i$ für alle $i = 1,\ldots,n$ ist; dabei ist I_i das abgeschlossene Intervall $[t_{i-1}, t_i]$.

Durch $\varphi_i' := r_i \cdot \varphi' | U_i x I_i$ ist eine Abbildung $U_i \times I_i \longrightarrow G$ mit $\varphi_i'(x,t) \cdot y_o = \varphi'(x,t)$ definiert. Für $x \in U_i$ und $t \in I_i$ sei

$$\psi_i'(x,t) := \varphi_i'(x,t) \quad \varphi_i'(x,t_{i-1})^{-1} \quad .$$

Dadurch wird eine Abbildung $\psi_i'\colon U_i \times I_i \longrightarrow G$ gegeben. Das Einselement von G sei mit e bezeichnet. Dann gilt:

$$\psi_i'(x,t_{i-1}) = e \text{ für } x \in U_i; \quad \psi_i'(x,t) = e \quad \text{für } (x,t) \in (U_i x Y) \cap I_i \ .$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\psi_1'(x,o) = e$ für $x \in U_i$. Zusätzlich gilt für $(x,t) \in U_i \times I_i$

$$\varphi'(x,t) = \psi_i'(x,t) \cdot \varphi'(x,t_{i-1}) \quad .$$

Es sei $V := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Eine Abbildung $\psi'\colon V \times I \longrightarrow G$ wird durch Rekursion gegeben: es sei $\psi' | V \times I_1 := \psi_1'$. Für $(x,t) \in V \times I_i$ und $1 \leq i \leq n$ sei

$$\psi'(x,t) := \psi_i'(x,t) \quad \psi'(x,t_{i-1}) \ .$$

Dann gilt

$$\psi'(x,o) = e \text{ für } x \in V; \quad \psi'(x,t) = e \text{ für } (x,t) \in (V \cap Y) x I \ .$$

Außerdem ist für $x \in V$ und $t \in I$

$$\psi'(x,t) \cdot \varphi'(x,o) = \varphi'(x,t) \quad ,$$

denn für $t \in I_1$ folgt diese Gleichung sofort aus den obigen Bemerkungen. Wenn die Gültigkeit der Gleichung für $x \in V$ und $t \in I_i$, i beliebig, angenommen wird, folgt sie auch für alle $t \in I_{i+1}$, da für $(x,t) \in V \times I_{i+1}$ gilt

$$\begin{aligned} \psi'(x,t) \cdot \varphi'(x,o) &= (\psi_{i+1}'(x,t) \quad \psi'(x,t_i)) \cdot \varphi'(x,o) \\ &= \psi_{i+1}'(x,t) \cdot \varphi'(x,t_i) \\ &= \varphi'(x,t) \quad . \end{aligned}$$

Für die Abbildung $\psi: V \times I \longrightarrow K$, definiert durch $\psi(x,t) := \Psi^{-1}(x, \psi'(x,t))$, gilt demnach, daß ψ als eine Kurve $I \xrightarrow{Y} \mathcal{K}_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\psi(t) \cdot \varphi(o) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ aufgefasst werden kann.

q. e. d.

Insbesondere gilt Satz 8 für das triviale holomorphe Faserbündel $(X \times M, X \times G, W)$ mit homogener Faser, wie bereits Ramspott [20] zeigte. Die Garbe über X von Keimen der Schnitte von $X \times M$ bzw. $X \times G$ kann mit M_α bzw. G_α, $\alpha = c, \omega$, identifiziert werden (siehe § 6). Die Garbe G_α wirkt in natürlicher Weise auf der Garbe M_α mittels der durch die Wirkungsabbildung $\cdot: G \times M \longrightarrow M$ induzierten Abbildung, die auch mit $_{\mu}\cdot^{\mu}$ bezeichnet wird.

Der zweite, dritte und vierte Schritt des Beweises von Satz 8 ergeben für die komplexe Liesche Gruppe G, die komplexe Mannigfaltigkeit M und den komplexen Raum X die

Folgerung.

Wirkt G transitiv auf M, dann wirkt die Garbe G_α transitiv auf der Garbe M_α. Außerdem ist dann $(G_c^m|U, G_\omega^m|U)$ ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen für jede holomorphe Abbildung $m: U \longrightarrow M$, wobei U eine beliebige offene Teilmenge von X ist. Ferner gilt dann für jedes $x \in X$ und jede Kurve $\varphi: I \longrightarrow M_\alpha(U)$, U eine offene Umgebung von x, daß es eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und eine Kurve $\Psi: I \longrightarrow G_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\varphi(t) = \psi(t) \cdot \varphi(o)$ für alle $t \in I$ gibt.

§ 11. Okasches Prinzip für holomorphe Faserbündel mit transitiv auf der Faser wirkender Strukturgruppe.

In diesem Paragraph wird gezeigt, daß jedes holomorphe Faserbündel E mit einer komplexen Mannigfaltigkeit M als Faser und eine komplexe Liesche Gruppe, die auf M transitiv wirkt, als Strukturgruppe ein holomorphes Faserbündel mit homogener Faser im Sinne von Definition 8, § 10, ist. Aus Satz 8, § 10, ergibt sich dann die von Ramspott in [20] gegebene Verallgemeinerung der Grauertschen Homotopieaussage, die ein Okasches Prinzip für solche Faserbündel E darstellt.

Es seien Y, f und ${}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\alpha}$ wie in Satz 8, § 10, angegeben. Dann gilt

Satz 9.

> Es sei E ein holomorphes Faserbündel über dem Steinschen Raum X mit einer komplexen Mannigfaltigkeit M als Faser und einer komplexen Lieschen Gruppe G, die auf M transitiv wirkt, als Strukturgruppe. Dann ist die natürliche Abbildung
>
> $$\Pi(X, {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{\omega}) \longrightarrow \Pi(X, {}^{Y}_{f}\mathcal{E}_{c})$$
>
> bijektiv.

Beweis: E ist ein holomorphes Faserbündel mit M als Faser. Es werden ein holomorphes Faserbündel K mit G als Faser und eine Abbildung $w: K x_X E \longrightarrow E$ konstruiert, so daß (E,K,w) ein holomorphes Faserbündel mit homogener Faser ist. Dann ist die Behauptung eine Folgerung von Satz 8.

Zum Bündel E seien die folgenden bestimmenden Elemente gegeben (vgl. [17, IV]): eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X, holomorphe Koordinatenfunktionen $\phi_i: E|U_i \longrightarrow U_i \times M$ und holomorphe Koordninatentransformationen $f_{ij}: U_{ij} \longrightarrow G$, die der Gleichung $f_{ij}(x)f_{jk}(x) = f_{ik}(x)$ für alle $x \in U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ und alle $i,j,k \in I$ genügen.

Folgende Äquivalenzrelation R wird auf $\bigcup_{i \in I} U_i \times G$ definiert: Zwei Punkte $(x_j,g) \in U_j \times G$ und $(x_i,g') \in U_i \times G$ heißen R-äquivalent, wenn gilt

$$x_i = x_j = x \in U_{ij} \quad \text{und} \quad g' = f_{ij}(x)(g) \ .$$

Die Klammern um den Punkt g in der zweiten Gleichung deuten an, daß $f_{ij}(x)$ als innerer Automorphismus auf g angewendet wird, d. h. $f_{ij}(x)(g) := f_{ij}(x)\, g\, f_{ji}(x)$.

Dann ist die Quotientenmenge

$$K := \bigcup_{i \in I} U_i \times G/R$$

mit der natürlichen Topologie und analytischen Struktur ein komplexer Raum (vgl. Grauert [10]). Die Abbildung $p: K \longrightarrow X$ sei durch $p \circ \pi = pr_X$ gegeben, wobei $\pi: X \times G \longrightarrow K$ die kanonische Projektion ist. Damit ist (K,p) ein holomorpher Faserraum über X.

Durch die Injektionen $\iota_i: U_i \times G \longrightarrow \bigcup_i U_i \times G$ werden fasertreue biholomorphe Abbildungen

$$\psi_i^{-1} := \pi \circ \iota_i: U_i \times G \longrightarrow K|U_i$$

induziert, d. h. K ist lokal isomorph zu dem trivialen Faserraum X x G. Für alle $x \in U_{ij}$ und $k \in K_x$ gilt

(+) $$\Psi_{i,x}(k) = f_{ij}(x)(\Psi_{j,x}(k)) \quad ,$$

wobei $\Psi_{i,x}: K_x \longrightarrow G$ durch $k \longmapsto pr_G(\Psi_i(k))$ gegeben wird, da $\Psi_j^{-1}(x,g) = \pi(\iota_j(x,g)) = \pi(\iota_i(x,f_{ij}(x)(g))) = \Psi_i^{-1}(x,f_{ij}(x)(g))$ für alle $g \in G$ also auch für $g := \Psi_{j,x}(k)$ ist, woraus sich $\Psi_i^{-1}(x,\Psi_{i,x}(k)) = \Psi_i^{-1}(x,f_{ij}(x)(\Psi_{j,x}(k)))$ ergibt.

Eine Verknüpfung m auf K wird durch die Gruppenmultiplikation in G induziert: es sei

$$m: K x_X K \longrightarrow K,\ (k,k') \longmapsto \Psi_i^{-1}(x,\Psi_{i,x}(k)\Psi_{i,x}(k')),$$

wobei $x \in U_i$ und $k,k' \in K_x$ sind. Diese Definition ist nach folgenden Überlegungen zulässig: nach der Gleichung (+) und da $f_{ij}(x)$ ein Homomorphismus ist, gilt für $x \in U_{ij}$

$$f_{ij}(x)(\Psi_{j,x}(k)\ \Psi_{j,x}(k')) = f_{ij}(x)(\Psi_{j,x}(k))f_{ij}(x)(\Psi_{j,x}(k'))$$
$$= \Psi_{i,x}(k)\ \Psi_{i,x}(k') \quad ,$$

also $\Psi_i^{-1}(x,\Psi_{i,x}(k)\ \Psi_{i,x}(k')) = \Psi_j^{-1}(x,\ \Psi_{j,x}(k)\ \Psi_{j,x}(k'))$.
Somit ist (K,p,m) ein holomorphes Faserbündel über X mit G als Faser.

Die Wirkungsabbildung $\cdot: G \times M \longrightarrow M$ induziert eine fasertreue holomorphe Abbildung $w: K x_X E \longrightarrow E$ durch die Zuordnung

$$(k,f) \longmapsto \Phi_i^{-1}(x,\ \Psi_{i,x}(k) \cdot \Phi_{i,x}(f))$$

für $x \in U_i, k \in K_x$ und $f \in E_x$. Dabei ist $\Phi_{i,x}(f) := pr_M(\Phi_i(f))$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\Phi_i(\Phi_j^{-1}(x,m)) = (x,f_{ij}(x)\cdot m)$ für $x \in U_{ij}$ und $m \in M$ ist. Mit $m := \Psi_{j,x}(k) \cdot \Phi_{j,x}(f)$ folgt dann aus der obigen Gleichung (+)

$$\Phi_{i,x}(\Phi^{-1}_{j,x}(\Psi_{j,x}(k)\cdot\Phi_{j,x}(f))) = f_{ij}(x)\cdot(\Psi_{j,x}(k)\cdot\Phi_{j,x}(f))$$

$$= (f_{ij}(x)\,\Psi_{j,x}(k))\cdot\Phi_{j,x}(f) = (f_{ij}(x)(f_{ji}(x)(\Psi_{i,x}(k))))\cdot\Phi_{j,x}(f)$$

$$= (\Psi_{i,x}(k)f_{ij}(x))\cdot\Phi_{j,x}(f) = \Psi_{i,x}(k)\cdot(f_{ij}(x)\cdot\Phi_{j,x}(f))$$

$$= \Psi_{i,x}(k)\cdot\Phi_{i,x}(f) \quad ,$$

woraus $\Phi^{-1}_{j}(x, \Psi_{j,x}(k)\cdot\Phi_{j,x}(f)) = \Phi^{-1}_{i}(x, \Psi_{i,x}(k)\cdot\Phi_{i,x}(f))$ folgt.

Die Abbildung w ist so definiert, daß sie der Verträglichkeitsbedingung von Definition 8 genügt. Deswegen ist (E,K,w) ein holomorphes Faserbündel über X mit homogener Faser. Die Behauptung folgt daher sofort aus Satz 8.

q. e. d.

§ 12. Transformationssatz für Erzeugendensysteme des Moduls der globalen Schnitte einer kohärenten Modulgarbe.

In diesem Paragraphen wird eine verallgemeinerte Fassung eines von Cartan aufgeworfenen Transformationsproblems gelöst.

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein Steinscher Raum und $\mathcal{F}$ sei eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über X. Es gebe ein endliches Erzeugendensystem $f_1,\ldots,f_r$ des $\mathcal{O}(X)$-Moduls $\mathcal{F}(X)$ der globalen Schnitte von $\mathcal{F}$, das zu einem Spaltenvektor $f := (f_1,\ldots,f_r)^T$ zusammengefasst wird. Es sei $g := (g_1,\ldots,g_s)^T$ ein Erzeugendensystem der Länge s von $\mathcal{F}(X)$. Der zu beweisende Transformationssatz gibt eine notwendige und hinreichende topologische Bedingung dafür an, daß sich f in g durch eine holomorphe (s x r)-Matrix $X \longrightarrow G(s,r,\mathbb{C})$ von maximalem Rang transformieren läßt. Dabei ist $G(s,r,\mathbb{C})$ die Stiefel-Mannigfaltigkeit der komplexen (s x r)-Matrizen vom Rang r, falls $s \geq r$ ist, und Rang s, falls $r \geq s$ ist.

Einige Bezeichnungen und Aussagen, die für die Formulierung und den Beweis des Transformationssatzes notwendig sind, werden zunächst aufgeführt.

Zum Beweis des Transformationssatzes wird die Tatsache benutzt, daß die komplexe Liesche Gruppe $GL(s,\mathbb{C}) := G(s,s,\mathbb{C})$ bzw. $GL(r,\mathbb{C}) := G(r,r,\mathbb{C})$ transitiv auf der komplexen Mannigfaltigkeit $G(s,r,\mathbb{C})$ durch Links- bzw. Rechtsmatrizenmultiplikation für $s \geq r$ bzw. $r \geq s$ wirkt. Die Folgerung von Satz 8, § 10, kann also auf diese Spezialfälle angewendet werden.

Die Konstruktion der in der soeben genannten Folgerung vorkommenden Kurve verläuft mit Hilfe der Eigenschaft (*) der homogenen Räume (siehe § 10), die für den Beweis des Transformationssatzes herangezogen wird. Für $r \geq s$, $G := GL(r,\mathbb{C})$, $M := G(s,r,\mathbb{C})$ und

$y_o := (1,0) \in G(s,r,\mathbb{C})$, wobei 1 die s-spaltige Einheitsmatrix bedeutet, hat diese Eigenschaft (*) die folgende Gestalt:

> Zu jedem $T \in G(s,r,\mathbb{C})$ gibt es eine Umgebung
> V von T und eine holomorphe Matrix
> $M: V \longrightarrow G(r-s,r,\mathbb{C})$, die eine holomorphe
> Abbildung $r_o: V \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})$ durch die Zuordnung
>
> $$T' \longmapsto \begin{pmatrix} T' \\ M \end{pmatrix}$$
>
> induziert.

Für $s \geq r$, $G := GL(s,\mathbb{C})$, und $y_o := \binom{1}{0} \in G(s,r,\mathbb{C})$, wobei 1 jetzt die r-reihige Einheitsmatrix ist, ist die Abbildung $r_o: V \longrightarrow GL(s,\mathbb{C})$ durch $T' \longmapsto (T',M)$ mit $M: V \longrightarrow G(s,s-r,\mathbb{C})$ gegeben.

Es sei bemerkt, daß die Aussage über Kurven, die in der Folgerung von Satz 8 vorkommt, für den Fall $G := GL(s,\mathbb{C})$, $M := G(s,r,\mathbb{C})$, $s \geq r$ in der Arbeit [7, Hilfssatz 4] bewiesen ist. Wesentlich zu dem dortigen Beweis ist auch die Eigenschaft (*) von homogenen Räumen.

Die Folgerung von Satz 8 ergibt übrigens eine Ergänzung von [6, § 2.3, Beispiel e], denn danach ist für $s \geq r$ bzw. $r \geq s$ und eine beliebige holomorphe Matrix $T: X \longrightarrow G(s,r,\mathbb{C})$ auf dem komplexen Raum X das Paar der Isotropiegarben

$(GL(s,\mathbb{C})^T_c, GL(s,\mathbb{C})^T_\omega)$ bzw. $(GL(r,\mathbb{C})^T_c, GL(r,\mathbb{C})^T_\omega)$

ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.

Zum Beweis des erwähnten Transformationssatzes wird auch eine Aussage aus der lokalen Algebra (siehe [18, 5.3]) benutzt:

Es sei R ein lokaler Ring und M ein R-Modul. Sind $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ und $\psi := (\psi_1, \ldots, \psi_r)$ zwei Erzeugendensysteme von M über R, so gibt es eine invertierbare (r x r)-Matrix mit Koeffizienten aus R, die φ in ψ transformiert.

Zur Formulierung der topologischen Bedingung in dem Transformationssatz wird die Modulgarbe $\mathcal{F}_c$ über der Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen Funktionskeime auf X verwendet. Diese Garbe ist $\mathcal{F}_\omega := \mathcal{F}$ zugeordnet und in [8, § 1] definiert. Es seien f_c und g_c die Bilder von $f_\omega := f$ bzw. $g_\omega := g$ bei der natürlichen Abbildung $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_c(X)$.

Mit m_x sei das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$ für $x \in X$ bezeichnet. Dann ist $L_x(\mathcal{F}) := \mathcal{F}_x / m_x \mathcal{F}_x$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathcal{O}_x/m_x = \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist. Die Abbildung $\lambda_x : \mathcal{F}(X) \longrightarrow L_x(\mathcal{F})$ ordne jedem globalen Schnitt von $\mathcal{F}$ seinen Keim in x modulo $m_x \mathcal{F}_x$ zu. Für $\alpha = c, \omega$, $T \in M(sxr, \mathbb{C})_\alpha(U)$ und U eine beliebige offene Teilmenge von X ist die Gleichung $T f_\alpha = g_\alpha$ gleichbedeutend mit $T(x)\, \lambda_x(f) = \lambda_x(g)$ für alle $x \in U$; die Menge $M(s \times r, \mathbb{C})$ aller komplexen (s x r)-Matrizen sei mit der Topologie des $\mathbb{C}^{sr}$ versehen. Dabei können f und g beliebige Elemente aus $\mathcal{F}^r(U)$ bzw. $\mathcal{F}^s(U)$ sein.

Nach Cartans Theorem A (vgl. [5]) ist f_x ein Erzeugendensystem der Länge r von $\mathcal{F}_x$ über $\mathcal{O}_x$ für alle $x \in X$. Die Vektoren $\lambda_x(f_1), \ldots, \lambda_x(f_r)$ spannen den Vektorraum $L_x(\mathcal{F})$ auf und bilden sogar genau dann eine Basis von $L_x(\mathcal{F})$, wenn $f_{1,x}, \ldots, f_{r,x}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_x$ ist (siehe [18, 15.1]). Nach [8, § 2, Corollar 3] sind f_c und g_c bzw. $f_{c,x}$ und $g_{c,x}$ Erzeugendensysteme von $\mathcal{F}_c(X)$ bzw. $\mathcal{F}_{c,x}$ für alle $x \in X$.

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen kann jetzt der Transformationssatz formuliert und als eine Folgerung des Hauptsatzes bewiesen werden.

Satz 10.

Für den Steinschen Raum X gilt:
Es gibt genau dann eine holomorphe
Matrix T: $X \longrightarrow G(s,r,\mathbb{C})$ mit $T f = g$,
wenn es eine stetige Matrix
S: $X \longrightarrow G(s,r,\mathbb{C})$ mit $S f_c = g_c$ gibt.

Beweis: Für $\alpha = c,\omega$ sei die Garbe $\mathcal{H}_\alpha$ über X durch

$$\mathcal{H}_\alpha(U) := \left\{ T \in G(s,r,\mathbb{C})_\alpha(U): T f_\alpha = g_\alpha \text{ über } U \right\} ,$$

wobei U eine offene Teilmenge von X ist, gegeben. Dann ist die Behauptung von Satz 10 äquivalent mit der folgenden: es gibt einen globalen Schnitt von $\mathcal{H}_\omega$ genau dann, wenn ein globaler Schnitt von $\mathcal{H}_c$ existiert.

Es sei die Inklusion $\mathcal{H}_\omega \longrightarrow \mathcal{H}_c$ mit i bezeichnet. Nach einer Schlußbemerkung von § 8 ist daher Satz 10 bewiesen, wenn $\mathcal{H}_\omega \xrightarrow{i} \mathcal{H}_c$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist. Das wird für die beiden Fälle $s \geq r$ und $r \geq s$ getrennt gezeigt.

Die oben angegebene Aussage aus der lokalen Algebra, angewendet auf die Erzeugendensysteme

$$\begin{pmatrix} f_{\alpha,x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_{\alpha,x} \qquad \text{bzw.} \qquad f_{\alpha,x} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g_{\alpha,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Länge s bzw. r für $s \geq r$ bzw. $r \geq s$, ergibt $\mathcal{H}_{\alpha,x} \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

Die Schnittmengen $\mathcal{H}_\alpha(U)$ seien für beide Fälle mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen, woduch $\mathcal{H}_\alpha$ zu einer Garbe topologischer Räume über X wird.

a) Für $s \geq r$ ist $\mathcal{T}_\omega \xrightarrow{i} \mathcal{T}_c$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume.

Es sei $\mathcal{K}_\alpha$, $\alpha = c,\omega$, die Garbe topologischer Gruppen, die durch die Gruppen

$$\mathcal{K}_\alpha(U) := \left\{ M \in GL(s,\mathbb{C})_\alpha(U) : M\, g_\alpha = g_\alpha \text{ über } U \right\} ,$$

die die Topologie der kompakten Konvergenz tragen, definiert ist. Nach Satz 3 aus [7] ist das Garbenpaar $(\mathcal{K}_c, \mathcal{K}_\omega)$ ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen.

Die Garbenabbildung $w_\alpha : \mathcal{K}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha \longrightarrow \mathcal{T}_\alpha$ sei durch die Matrizenmultiplikation $(M,T) \longmapsto M\,T$ gegeben. Dann wirkt $\mathcal{K}_\alpha$ auf $\mathcal{T}_\alpha$ durch w_α. Die Inklusionen $\mathcal{T}_\omega \longrightarrow \mathcal{T}_c$ und $\mathcal{K}_\omega \longrightarrow \mathcal{K}_c$ sind mit w_α, $\alpha = c,\omega$, verträglich.

1) $(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, w_\alpha)$ ist eine Garbe homogener Räume.
Um die Transitivität der Wirkungsabbildung w_α zu zeigen, seien Schnitte $T_i, i = 1,2$, von $\mathcal{T}_\alpha$ über einer offenen Umgebung U eines Punktes $x \in X$ gegeben. Nach der Folgerung zu Satz 8 wirkt $GL(s,\mathbb{C})_\alpha$ transitiv auf $G(s,r,\mathbb{C})_\alpha$, womit die Existenz einer Umgebung $V \subset U$ von x und eines Schnittes $M \in GL(s,\mathbb{C})_\alpha(V)$ mit $M\,T_1 = T_2$ über V gesichert ist. Über V ist

$$(+) \qquad M\, g_\alpha = M(T_1\, f_\alpha) = (M\,T_1) f_\alpha = T_2\, f_\alpha = g_\alpha ,$$

also ist $M \in \mathcal{K}_\alpha(V)$. Danach wirkt $\mathcal{K}_\alpha$ transitiv auf $\mathcal{T}_\alpha$.

2) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $T \in \mathcal{T}_\omega(U)$, so daß $(\mathcal{K}_c^T | U, \mathcal{K}_\omega^T | U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(GL(s,\mathbb{C})_c | U, GL(s,\mathbb{C})_\omega | U)$ ist.

Da $\mathcal{T}_{\omega,x} \neq \emptyset$ ist, gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $T \in \mathcal{T}_\omega(U)$. Nach der Folgerung zu Satz 8 ist $(GL(s,\mathbb{C})^T_c|U,\ GL(s,\mathbb{C})^T_\omega|U)$ ein Okasches Paar, wobei T als ein Element aus $G(s,r,\mathbb{C})_\alpha(U)$ aufgefasst wird. Nach der Gleichung (+) für $T_1 = T_2 = T$ ist $\mathcal{K}^T_\alpha|U = GL(s,\mathbb{C})^T_\alpha|U$, woraus die Behauptung folgt.

3) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $\cdot \in \mathcal{T}_\omega(U)$, so daß $\rho(\mathcal{K}_\alpha|U)$ transitiv auf $\rho_T(\mathcal{T}_\alpha|U)$ wirkt. Weil $\mathcal{T}_{\omega,x} \neq \emptyset$ ist, genügt es, nach Hilfssatz 3 zu zeigen: Zu jeder Kurve $\varphi: I \longrightarrow \mathcal{T}_\alpha(U)$, wobei U eine offene Umgebung von $x \in X$ ist, gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und eine Kurve $\psi: I \longrightarrow \mathcal{K}_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\varphi(t)\,\varphi(o) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$.

Da φ als eine Kurve in $G(s,r,\mathbb{C})_\alpha(U)$ aufgefasst werden kann, ergibt die Folgerung zu Satz 8 die Existenz einer offenen Umgebung $V \subset U$ von x und einer Kurve $\psi: I \longrightarrow GL(s,\mathbb{C})_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\varphi(t) = \psi(t)\,\varphi(o)$ für alle t. Es gilt daher für jedes $t \in I$

$$\psi(t)\, g_\alpha = \psi(t)(\varphi(o)\, f_\alpha) = \varphi(t)\, f_\alpha = g_\alpha \quad ,$$

d. h. ψ ist eine Kurve in $\mathcal{K}_\alpha(V)$.

Insgesamt ist bewiesen, daß $\mathcal{T}_\omega \xrightarrow{i} \mathcal{T}_c$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume für den Fall $s \geq r$ ist. Der schwierigere Fall der Transformation eines Erzeugendensystems in einen kleineren folgt.

b) Für $r \geq s$ ist $\mathcal{T}_\omega \xrightarrow{i} \mathcal{T}_c$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume.

Mit $\mathcal{K}_\alpha$, $\alpha = c,\omega$, sei diesmal die durch

$$\mathcal{K}_\alpha(U) := \left\{ M \in GL(r,\mathbb{C})_\alpha(U):\ M\, f_\alpha = f_\alpha \quad \text{über } U \right\}$$

wobei U eine offene Teilmenge von X ist und $\mathcal{K}_\alpha(U)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen ist, definierte Garbe von topologischen Gruppen bezeichnet. Das Garbenpaar $(\mathcal{K}_c, \mathcal{K}_\omega)$ ist nach [7, Satz 3] ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen. Die Garbe $\mathcal{K}_\alpha$ wirkt rechts auf der Garbe $\mathcal{J}_\alpha$ mittels $w_\alpha : \mathcal{K}_\alpha \times \mathcal{J}_\alpha \longrightarrow \mathcal{J}_\alpha$, wobei w_α jetzt durch die Matrizenmultiplikation $(M,T) \longmapsto T\,M$ gegeben ist. Trivialerweise sind die Inklusionen $\mathcal{J}_\omega \longrightarrow \mathcal{J}_c$ und $\mathcal{K}_\omega \longrightarrow \mathcal{K}_c$ mit w_α, $\alpha = c,\omega$, verträglich.

1) $(\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, w_\alpha)$ ist eine Garbe homogener Räume.
Es ist zu zeigen, daß w_α eine transitive Wirkungsbildung ist.

Mit $\mathcal{K}_{o,\alpha}$ und $\mathcal{J}_{o,\alpha}$ seien die Garben $\mathcal{K}_\alpha$ bzw. $\mathcal{J}_\alpha$ für den Spezialfall $f_\alpha := \binom{g_\alpha}{0}$ bezeichnet. Es sei T_o die Abbildung aus $G(s,r,\mathbb{C})_\alpha(X)$, die konstant gleich (1,0) ist, wobei 1 die s-spaltige Einheitsmatrix bedeutet. Dann ist $T_o \in \mathcal{J}_{o,\alpha}(X)$.

$\mathcal{K}_\alpha$ wirkt durch w_α transitiv auf $\mathcal{J}_\alpha$, falls die Garbenabbildung $\mathcal{K}_{o,\alpha} \longrightarrow \mathcal{J}_{o,\alpha}$, $M \longmapsto T_o\,M$, surjektiv ist, was im folgenden nachgewiesen wird:

Nach der in diesem Paragraphen angegebenen Aussage aus der lokalen Algebra gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U und eine Matrix $M_o \in GL(r,\mathbb{C})_\alpha(U)$ mit

$$M_o\, f_\alpha = \binom{g_\alpha}{0} \quad \text{über U.}$$

Es seien Matrizen $T_i \in \mathcal{J}_\alpha(U)$, $i = 1,2$, gegeben. Dann ist $T_i' := T_i\, M_o^{-1}$, $i = 1,2$, aus $\mathcal{J}_{o,\alpha}(U)$. Es gibt daher Umgebungen $V_i \subset U$ von x und Matrizen $M_i' \in \mathcal{K}_{o,\alpha}(V_i)$ mit $T_o M_i' = T_i'$, $i = 1,2$. Über $V := V_1 \cap V_2$ sei

$$M' := (M_1')^{-1}\, M_2' \quad .$$

Es ist $M' \in \mathfrak{K}_{0,\alpha}(V)$ mit $T_1' M' = T_2'$ über V. Die Matrix

$$M := M_0^{-1} M' M_0$$

ist aus $\mathfrak{K}_\alpha(V)$ und führt T_1 in T_2 über:

$$T_1 M = T_1 M_0^{-1} M' M_0 = T_1' M' M_0 = T_2' M_0 = T_2 \quad .$$

Daher folgt die Transitivität von w_α aus der Surjektivität der Abbildung $\mathfrak{K}_{0,\alpha} \longrightarrow \mathfrak{H}_{0,\alpha}$, $M \longmapsto T_0 M$. Daß diese Abbildung tatsächlich surjektiv ist, wird jetzt gezeigt.

Es sei T ein Schnitt von $\mathfrak{H}_{0,\alpha}$ über einer offenen Umgebung U eines Punktes $x \in X$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß für $k \leq s$ die ersten k Elemente des Spaltenvektors g_x ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_x$ bilden. Dieser Teilvektor sei mit g_x' bezeichnet. Dann ist $g_{c,x}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_{c,x}$ nach [8, § 2, Corollar 3].

Aus der lokalen Algebra folgt, daß es eine Umgebung $U_1 \subset U$ von x und eine Matrix $M_1 \in GL(s, \mathbb{C})_\alpha(U_1)$ gibt, mit

$$M_1 g_\alpha = \begin{pmatrix} g_\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Es sei M_2 die durch M_1 induzierte Matrix aus $GL(r, \mathbb{C})_\alpha(U_1)$, d. h.

$$M_2 := \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist $M_1 T_0 = T_0 M_2$ und

$$M_2 \begin{pmatrix} g_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Es sei $\mathfrak{K}_{0,\alpha}^{i}$ bzw. $\mathfrak{H}_{0,\alpha}'$ die Untergarbe von $\mathfrak{K}_{0,\alpha}$ bzw. $\mathfrak{H}_{0,\alpha}$, die sich aus der Festsetzung $g_\alpha := \begin{pmatrix} g_\alpha' \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt. Dann sind T_0 und

$$\tilde{T} := M_1 \; T \; M_2^{-1}$$

aus $\mathfrak{H}_{0,\alpha}'(U_1)$.

Es genügt, die Surjektivität der Abbildung $\mathcal{K}'_{o,\alpha} \longrightarrow \mathcal{J}'_{o,\alpha}$, $\widetilde{M} \longmapsto T_o \widetilde{M}$, zu zeigen, denn danach gibt es eine offene Umgebung $V \subset U_1$ von x und ein $\widetilde{M} \in \mathcal{K}'_{o,\alpha}(V)$ mit $T_o \widetilde{M} = \widetilde{T}$, woraus für die Matrix

$$M := M_2^{-1} \widetilde{M} M_2$$

aus $\mathcal{K}_{o,\alpha}(V)$ folgt

$$T_o M = T_o M_2^{-1} \widetilde{M} M_2 = M_1^{-1} T_o \widetilde{M} M_2 = M_1^{-1} \widetilde{T} M_2 = T \quad ,$$

d. h. die Abbildung $\mathcal{K}_{o,\alpha} \longrightarrow \mathcal{J}_{o,\alpha}$, $M \longmapsto T_o M$, ist surjektiv.

Es sei T' eine beliebige Matrix aus $\mathcal{J}'_{o,\alpha}(U)$, geschrieben

$$T' = \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 \\ t'_3 & t'_4 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei (t'_1, t'_2) bzw. (t'_3, t'_4) die ersten k bzw. letzten (s-k) Zeilen von T' und $\begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} t'_2 \\ t'_4 \end{pmatrix}$ die ersten k bzw. letzten (r-k) Spalten von T' sind; U sei eine offene Umgebung von $x \in X$.

Dann sind $t'_1 g'_\alpha = g'_\alpha$ und $t'_3 g'_\alpha = o$.

Weil g'_x ein minimales Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_x$ ist, bildet $\lambda_x(g')$ eine Basis des Vektorraumes $L_x(\mathcal{F})$. Aus $t'_1 g'_\alpha = g'_\alpha$ und $t'_3 g'_\alpha = o$ folgen $t'_1(x) \lambda_x(g') = \lambda_x(g')$ und $t'_3(x) \lambda_x(g) = o$, woraus sich $t'_1(x) = 1$ und $t'_3(x) = o$ ergeben. Da T'(x) maximalen Rang besitzt, ist $t'_4(x) \in G((s-k)x(r-k), \mathbb{C})$. Infolgedessen gibt es eine Matrix $m^* \in M((r-s)x(r-k), \mathbb{C})$, die $t'_4(x)$ zu einer invertierbaren (r-k)-Matrix ergänzt. Es sei m'_2 konstant gleich m^*. Mit

$$m' := \begin{pmatrix} t'_4 \\ m'_2 \end{pmatrix}$$

ist daher $m'(x) \in GL(r-k, \mathbb{C})$, und für die $(r \times r)$-Matrix

$$M' := \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 \\ t'_3 & t'_4 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad M'(x) = \begin{pmatrix} 1 & t'_2(x) \\ & \\ 0 & m'(x) \end{pmatrix},$$

also ist $M'(x)$ invertierbar. Es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von x mit $M' \in GL(r, \mathbb{C})(V)$, woraus die Surjektivität der erwähnten Abbildung $\mathcal{K}'_{o,\alpha} \longrightarrow \mathcal{J}'_{o,\alpha}$ folgt. Damit ist die Transitivität von w_α nachgewiesen

2) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $T \in \mathcal{J}_\omega(U)$, so daß $(\mathcal{K}^{T}_{c}|U, \mathcal{K}^{T}_{\omega}|U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(GL(r, \mathbb{C})_c|U,\ GL(r, \mathbb{C})_\omega|U)$ ist.

Es seien $\mathcal{K}_{o,\alpha}$, T_o und M_o wie oben und U die offene Umgebung eines Punktes $x \in X$, auf der M_o definiert ist.

Für eine Matrix $M \in GL(r, \mathbb{C})_\alpha(X)$, deren letzten $(r-s)$ Zeilen mit (m_1, m_2) bezeichnet werden, gilt

$$T_o\, M = T_o \qquad \text{und} \qquad M \begin{pmatrix} g_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn gilt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m_1\, g_\alpha = o.$$

Dabei bezeichnet 1 die s-spaltige Einheitsmatrix. Nach Satz 2 aus [7] ist daher das Garbenpaar $(\mathcal{K}^{T_o}_{o,c}|U,\ \mathcal{K}^{T_o}_{o,\omega}|U)$ ein Okasches Paar. Es sei $T := T_o\, M_o$. Dann ist $T \in \mathcal{J}_\omega(U)$. Der durch M_o definierte innere Automorphismus von $GL(r, \mathbb{C})_\alpha|U$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{K}^{T}_{\alpha}|U \longrightarrow \mathcal{K}^{T_o}_{o,\alpha}|U,\ M \longmapsto M_o\, M\, M_o^{-1}$$

für $\alpha = c, \omega$, woraus nach der Folgerung zu Satz 5 in § 6 folgt,

daß $(\mathcal{K}_c^T|U, \mathcal{K}_\omega^T|U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(GL(r,\mathbb{C})_c|U, GL(r,\mathbb{C})_\omega|U)$ ist.

3) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $T \in \mathcal{T}_\omega(U)$, so daß $\rho(\mathcal{K}_\alpha|U)$ transitiv auf $\rho_T(\mathcal{T}_\alpha|U)$ wirkt.

Es sei U eine beliebige offene Umgebung eines Punktes $x \in X$ und $\varphi: I \longrightarrow \mathcal{T}_\alpha(U)$ sei eine Kurve in $\mathcal{T}_\alpha(U)$. Weil $\mathcal{T}_{\omega,x} \neq \emptyset$ ist, genügt es nach Hilfssatz 3, die Existenz einer offenen Umgebung $V \subset U$ von x und eine Kurve $\psi: I \longrightarrow \mathcal{K}_\alpha(V)$ mit $\psi(o) = 1$ und $\varphi(o)\ \psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ nachzuweisen.

Die Abbildung φ kann als eine Kurve in $G(s,r,\mathbb{C})_\alpha(U)$ aufgefasst werden. Es sei $\psi: I \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})_\alpha(V)$ die in Satz 8 für den Spezialfall $G = GL(r,\mathbb{C}), M = G(s,r,\mathbb{C})$ konstruierte Kurve über der dort angegebenen Umgebung $V \subset U$ von x mit den Eigenschaften $\psi(o) = 1$ und $\varphi(o)\ \psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$. Es wird gezeigt, daß ψ eine Kurve in $\mathcal{K}_\alpha(V)$ ist.

Die Bezeichnungen von dem vierten Schritt des Beweises zu Satz 8 seien für den erwähnten Spezialfall übernommen. ψ setzt sich demnach zusammen aus Kurven $\psi_i: I_i \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})_\alpha(U_i)$, die durch

$$\psi_i(t) = \varphi_i(t_{i-1})^{-1}\ \varphi_i(t)$$

mit $\varphi_i := r_i \circ \varphi$ gegeben sind. Da die Abbildungen r_i bezüglich ((r-s)x r)-Matrizen M_i, wie am Anfang dieses Paragraphen angegeben ist, definiert sind, folgt

$$\psi_i(t)\ f_\alpha = \begin{pmatrix} \varphi(t)\ f_\alpha \\ M_i\ f_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\alpha \\ M_i f_\alpha \end{pmatrix} = \varphi_i(t_{i-1})\ f_\alpha ,$$

woraus sich $\psi_i(t)\ f_\alpha = f_\alpha$ und daher auch $\psi(t)\ f_\alpha = f_\alpha$ ergeben, d. h. ψ ist eine Kurve in $\mathcal{K}_\alpha(V)$, die die erforderten Eigenschaften besitzt.

Damit ist bewiesen, daß $\mathcal{I}_\omega \xrightarrow{i} \mathcal{I}_c$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist. Daraus folgt, wie bereits erwähnt, die Gültigkeit von Satz 10.

q. e. d.

Für r = s bringt Satz 10 einen anderen Beweis des in [8] bewiesenen Transformationssatzes für Modulbasen gleicher Länge. Der dortige Beweis dieses Spezialfalles besteht einfach aus einer Anwendung der Hilfssätze 1 und 2.

Abschließend eine Bemerkung, die in dem nächsten Paragraphen verwendet wird: Die komplexe Liesche Gruppe $GL(s+r,\mathbb{C})$ wirkt auf der komplexen Mannigfaltigkeit $G(s,s+r,\mathbb{C})$ durch die Rechtsmultiplikation von Matrizen. Es sei $T_o := (0,1) \in G(s,s+r,\mathbb{C})$, wobei 1 die s-spaltige Einheitsmatrix ist. Dann ist die Isotropiegruppe von T_o in $GL(s+r,\mathbb{C})$ eine abgeschlossene komplexe Liesche Untergruppe von $GL(s+r,\mathbb{C})$ (vgl. § 10), d. h. die Menge aller komplexen (s+r)-reihigen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } A \in GL(s,\mathbb{C}) \text{ und } B \in M(sxr,\mathbb{C})$$

ist eine komplexe Liesche Gruppe. Die folgende Abkürzung wird festgelegt:

$$G_o(s,r) := GL(s+r,\mathbb{C})_{T_o}$$

Außerdem sei $A_o(s,r)$ die zu $G_o(s,r)$ gehörige Lie-Algebra, d. h. die Menge aller komplexen (s+r)-reihigen Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in M(s \times s,\mathbb{C}) \text{ und } b \in M(s \times r,\mathbb{C}).$$

§ 13. Okasches Prinzip für Endromisbündel.

Das in Satz 5 aus [7] enthaltene Okasche Prinzip für Endromisbündel folgt aus dem Hauptsatz, wie im folgenden gezeigt wird.

Die Bezeichnungen, die in dem letzten Paragraphen eingeführt wurden, werden übernommen. Ferner bezeichne E das Endromisbündel über X von $\mathcal{F}$ bezüglich des r-gliedrigen Erzeugendensystems f und der beliebigen natürlichen Zahl s; d. h. (siehe [7,§1]):

$$E := \{(x,T) \in X \times M(s \times r, \mathbb{C}): \text{Rang } (T\lambda_x(f)) = \dim L_x(\mathcal{F})\} .$$

Die Garbe $\mathcal{E}_\alpha$ von Mengen, $\alpha = c,\omega$, gegeben durch

$$\mathcal{E}_\alpha(U) := \{T \in M(s \times r, \mathbb{C})_\alpha(U): \ (x,T(x)) \in E \text{ für alle } x \in U\} ,$$

wobei U eine offene Teilmenge von X ist, kann mit der Garbe von Keimen stetiger bzw. holomorpher Schnitte von E identifiziert werden. Die Schnittmengen $\mathcal{E}_\alpha(U)$ seien mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Dann ist $\mathcal{E}_\alpha$ eine Garbe Hausdorffscher Räume. Die Inklusion $\mathcal{E}_\omega \longrightarrow \mathcal{E}_c$ wird mit i bezeichnet.

Satz 11.

Für den Steinschen Raum X ist die natürliche Abbildung

$$\Pi(X, \mathcal{E}_\omega) \longrightarrow \Pi(X, \mathcal{E}_c)$$

bijektiv.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist $s \geq \dim L_x(\mathcal{F})$ für alle $x \in X$, da sonst die Behauptung wegen $\mathcal{E}_\alpha(X) = \emptyset$ für $\alpha = c,\omega$ trivial ist.

Eine Untergarbe $\mathcal{H}_\alpha$ von $G_o(s,r)_\alpha$, $\alpha = c,\omega$, wird definiert: Für jede offene Menge $U \subset X$ sei die Gruppe

$$\mathcal{H}_\alpha(U) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_o(s,r)_\alpha(U) \colon B\, f_\alpha = 0 \text{ über } U \right\}$$

mit der durch $G_o(s,r)_\alpha(U)$ induzierten Topologie versehen.
Die Garbe $\mathcal{H}_\alpha$ topologischer Gruppen wirkt auf $\mathcal{E}_\alpha$ durch die folgende Garbenabbildung w_α:

$$w_{\alpha,U} \colon \mathcal{H}_\alpha(U) \times \mathcal{E}_\alpha(U) \longrightarrow \mathcal{E}_\alpha(U),\ \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T\right) \longmapsto A\,T + B \quad .$$

Es wird gezeigt, daß $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{H}_\alpha, w_\alpha, i)$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist.

Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{E}_{\omega,x} \neq \emptyset$: Es sei $\dim L_x(\mathcal{F}) = k$. Dann ist $k \leq s$. Da die Vektoren $\lambda_x(f_1),\ldots,\lambda_x(f_r)$ den Vektorraum $L_x(\mathcal{F})$ erzeugen, folgt außerdem, daß $k \leq r$ ist und daß k von den r Vektoren $\lambda_x(f_i)$, $i = 1,\ldots,r$, eine Basis bilden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\lambda_x(f_1),\ldots,\lambda_x(f_k)$ eine Basis von $L_x(\mathcal{F})$ ist. Daher erzeugen schon $f_1,\ldots,f_k$ den Halm $\mathcal{F}_x$ über $\mathcal{O}_x$. Es gibt also eine offene Umgebung U von x, so daß $\lambda_y(f_1),\ldots,\lambda_y(f_k)$ den Vektorraum $L_y(\mathcal{F})$ für alle $y \in U$ aufspannen. Die konstante (sxr)-Matrix

$$T_o := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei 1 die Einsmatrix in $GL(k,\mathbb{C})$ bedeutet, ist ein holomorpher Schnitt in E über U, also ist $\mathcal{E}_{\omega,x} \neq \emptyset$.

Nach [7, Satz 4] folgt, daß w_α, $\alpha = c,\omega$, eine transitive Wirkungsabbildung ist. Der Satz 2 in [7] besagt, daß $(\mathcal{H}_c, \mathcal{H}_\omega)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(G_o(s,r)_c, G_o(s,r)_\omega)$ ist. Trivialerweise sind die Wirkungsabbildungen w_α, $\alpha = c,\omega$, mit den Inklusionen $\mathcal{H}_\omega \longrightarrow \mathcal{H}_c$ und $\mathcal{E}_\omega \longrightarrow \mathcal{E}_c$ verträglich.

Nach Hilfssatz 3, § 5, und [7, Hilfssatz 5] wirkt die Garbe $\rho(\mathcal{H}_\alpha)$ transitiv auf der Garbe $\rho_T(\mathcal{E}_\alpha)$ für alle $T \in \mathcal{E}_\alpha(X)$, $\alpha = c, \omega$. Weil $\mathcal{E}_{\alpha,x} \neq \phi$ für alle $x \in X$ ist, folgt, daß die Eigenschaft 4b von Definition 7 für $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{H}_\alpha, w_\alpha, i)$ erfüllt ist.

Es sei U eine offene Umgebung eines Punktes $x \in X$, über der die oben angegebene (sxr)-Matrix T_o ein Schnitt von E ist. Dann ist $(\mathcal{H}_c^{T_o}|U, \mathcal{H}_\omega^{T_o}|U)$ ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(G_o(s,r)_c, G_o(s,r)_\omega)$, wie die anschließenden Überlegungen zeigen. Für jede offene Teilmenge $V \subset U$ ist $\mathcal{H}_\alpha^{T_o}(V)$ nach [7, Satz 4] gleich der Menge der (s+r)-reihigen Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & T_o - A\,T_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A \in GL(s,\mathbb{C})_\alpha(V) \text{ und } A\,g_\alpha = g_\alpha \text{ über } V,$$

wobei $g_\alpha := T_o\,f_\alpha$ ist. Eine Garbe $\mathcal{A}_\alpha$ über U wird wie folgt definiert: Für eine offene Menge $V \subset U$ sei $\mathcal{A}_\alpha(V)$ die Menge der (s+r)-reihigen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -a\,T_o \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in M(sxs,\mathbb{C})_\alpha(V) \text{ und } a\,g_\alpha = o \text{ über } U.$$

Durch Ausrechnung mit Hilfe der gewöhnlichen Exponentialabbildung für Matrizen ergibt sich, daß das Garbenpaar $(\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_\omega)$ das Paar $(\mathcal{H}_c^{T_o}|U, \mathcal{H}_\omega^{T_o}|U)$ erzeugt.

$\mathcal{A}_\omega$ ist eine $\mathcal{O}$-Untergarbe der köharenten $\mathcal{O}$-Garbe $A_o(s,r)_\omega$ und ist vom endlichen Typ, weil die Relationengarbe zwischen den Schnitten $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{F}(U)$ vom endlichen Typ ist. Deswegen ist $\mathcal{A}_\omega$ kohärent und damit $\mathcal{H}_\omega^{T_o}|U$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untergarbe von $G_o(s,r)_\omega$.

$\mathcal{A}_c$ ist eine $\mathcal{C}$-Untergarbe von $A_o(s,r)_c$. Für jede offene Teilmenge $V \subset U$ ist die durch $w_{c,V}$ induzierte Abbildung

$$\mathcal{H}_c(V) \longrightarrow \mathcal{E}_c(V), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto A\,T_o + B$$

stetig. $\mathcal{K}_c^{T_o}(V)$, als das Urbild von T_o bei dieser Abbildung, ist abgeschlossen in $\mathcal{K}_c(V)$ enthalten, weil $\mathcal{E}_c(V)$ Hausdorffsch ist. Nun ist $\mathcal{K}_c(V)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $G_o(s,r)_c(V)$: Es sei $\mathcal{F}_c(V)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen (siehe [8, § 1]). Die Modulmultiplikation induziert eine stetige Abbildung

$$G_o(s,r)_c(V) \longrightarrow \mathcal{F}_c^{s+r}(V), \quad M \longmapsto M\,\tilde{f}_c \quad ,$$

wobei $\tilde{f}_c$ ein beliebiges, aber festgehaltenes Element aus $\mathcal{F}_c^{s+r}(V)$ ist. Es sei $\tilde{f}_c := \begin{pmatrix} 0 \\ f_c \end{pmatrix}$. Da $\mathcal{F}_c(V)$ Hausdorffsch ist, folgt, daß das Urbild von $\tilde{f}_c$ bei dieser Abbildung, also $\mathcal{K}_c(V)$, abgeschlossen in $G_o(s,r)_c(V)$ ist. Daraus ergibt sich die Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}_c^{T_o}(V)$ in $G_o(s,r)_c(V)$. Das bedeutet, daß $\mathcal{K}_c^{T_o}|U$ eine vollständige $\mathcal{C}$-Untergarbe von $G_o(s,r)_c$ ist.

Das Garbenpaar $(\mathcal{K}_c^{T_o}|U, \mathcal{K}_\omega^{T_o}|U)$ ist auf Grund der letzten Überlegungen ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(G_o(s,r)_c|U,\ G_o(s,r)_\omega|U)$.

Damit ist gezeigt, daß $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, w_\alpha, i)$ ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist. Satz 11 ist daher eine Folgerung des Hauptsatzes.

q. e. d.

Ein Okasches Prinzip für Endromisbündel läßt sich aus Satz 11 schließen: Ein Endromisbündel über einem Steinschen Raum besitzt genau dann einen holomorphen Schnitt, wenn es einen stetigen Schnitt hat; zwei holomorphe Schnitte können ineinander über holomorphe Schnitte deformiert werden genau dann, wenn stetige Schnitte sie ineinander deformieren.

§ 14.Okasches Prinzip für Modulbasen.

Das Okasche Prinzip für Modulbasen, das in dem Satz 5 der Arbeit [8] ausgedrückt ist, ist eine unmittelbare Folgerung des Hauptsatzes dieser Arbeit, wie in diesem Paragraphen erläutert wird.

Die Bezeichnungen von § 12 seien übernommen. Zur Formulierung des erwähnten Prinzips werden über X Garben $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha = c, \omega$, eingeführt: Für alle offenen Teilmengen U von X sei $\mathcal{B}_\alpha(U)$ die Menge aller r-Tupel aus $\mathcal{F}_\alpha^r(U)$, deren Keime in jedem Punkt $x \in U$ den Halm $\mathcal{F}_{\alpha,x}$, $\alpha = c$ bzw. ω, über $\mathcal{O}_x$ bzw. $\mathcal{O}_x$ erzeugen. Dadurch werden Garben von Mengen $\mathcal{B} := \mathcal{B}_\omega$ und $\mathcal{B}_c$ gegeben.

Da X eine abzählbare Topologie hat (siehe Kapitel III), ist $\mathcal{F}$ eine Fréchetgarbe. $\mathcal{F}_c$ kann zu einer Fréchetgarbe gemacht werden, so daß die natürliche Abbildung $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_c$ stetig ist (vgl. [8, § 1]). Die Schnittmengen $\mathcal{B}_\alpha(U)$ seien mit der durch $\mathcal{F}_\alpha^r(U)$ induzierten Topologie versehen, womit die Garbe $\mathcal{B}_\alpha$ zu einer Garbe topologischer Räume wird. Die durch $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_c$ induzierte stetige Garbenabbildung $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_c$, $g \longmapsto g_c$, sei mit h bezeichnet (vgl. [8]).

Satz 12.

Für den Steinschen Raum X ist die durch die Abbildung $h: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_c$ *induzierte Abbildung*

$$h': \Gamma(X, \mathcal{B}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{B}_c)$$

bijektiv.

Beweis: Die Moduloperationen auf $\mathcal{F}_\alpha$ induzieren die Wirkungsabbildungen

$$w_\alpha : GL(r, \mathbb{C})_\alpha \times \mathcal{B}_\alpha \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha, \ (M,g) \longmapsto M\,g \quad .$$

Im folgenden wird gezeigt, daß $(\mathcal{B}_\alpha, GL(r, \mathbb{C})_\alpha, w_\alpha, h)$, $\alpha = c,\omega$, ein Okasches Paar von Garben homogener Räume ist. Danach ergibt sich Satz 12 sofort aus dem Hauptsatz.

Nach der in § 12 zitierten Aussage aus der lokalen Algebra wirkt $GL(r, \mathbb{C})_\alpha$ durch w_α transitiv auf $\mathcal{B}_\alpha$. Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{B}_{\alpha,x} \neq \emptyset$ wegen $f_{\alpha,x} \in \mathcal{B}_{\alpha,x}$. Daher ist $(\mathcal{B}_\alpha, GL(r, \mathbb{C})_\alpha, w_\alpha)$ eine Garbe homogener Räume.

Trivialerweise ist das Garbenpaar $(GL(r, \mathbb{C})_c, GL(r, \mathbb{C})_\omega)$ ein Okasches Paar von Garben nicht-abelscher Gruppen. Da $(M\,g)_c = M\,g_c$ für $M \in GL(r, \mathbb{C})_\omega(U)$, $g \in \mathcal{B}(U)$ und U eine offene Teilmenge von X ist, sind h und die Inklusion $GL(r, \mathbb{C})_\omega \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})_c$ mit w_α, $\alpha = c,\omega$, verträglich.

Nach Hilfssatz 3, § 5, und Hilfssatz 3 in [8] folgt, daß $\rho(GL(r, \mathbb{C})_\alpha)$ transitiv auf $\rho_{f_\alpha}(\mathcal{B}_\alpha)$ wirkt. Das Garbenpaar $(GL(r, \mathbb{C})_c^{f_c}, GL(r, \mathbb{C})_\omega^{f})$ ist nach [7, Satz 3] ein Okasches Paar von Untergarben des Paares $(GL(r, \mathbb{C})_c, GL(r, \mathbb{C})_\omega)$.

q. e. d.

f und g seien r-gliedrige Erzeugendensysteme des $\mathcal{O}(X)$-Moduls $\mathcal{F}(X)$. Die Injektivität von h' ergibt das folgende Okasche Prinzip für Modulbasen: f und g sind im Raum $\mathcal{B}(X)$ genau dann homotop, wenn f_c und g_c in $\mathcal{B}_c(X)$ homotop sind.

V. Literaturverzeichnis.

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Paris: Hermann 1965.

[2] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. Pures Appl. 19, 1-26 (1940).

[3] - Espaces fibrés analytiques. Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico 1958.

[4] CHEVALLEY, C.: Theory of Lie Groups. PrincetonUniv.Press(1946).

[5] FORSTER, O.: Funktionentheorie mehrer Veränderlichen. Vorlesungsausarbeitung von K. Wiegmann. München (1964).

[6] FORSTER, O., u. K.J. RAMSPOTT: Okasche Paare von Garben nichtabelscher Gruppen. Inventiones Math. 1, 260-286 (1966).

[7] - Analytische Modulgarben und Endromisbündel. Inventiones Math. 2, 145-170 (1966).

[8] - Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren. Inventiones Math. 5, 255-276 (1968).

[9] FRENKEL, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. France 85, 135-220 (1957).

[10] GRAUERT, H.: Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Math. Ann.133, 139-159(1957).

[11] - Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. 133, 450-472 (1957).

[12] - Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Math. Ann. 135, 263-273 (1958).

[13] GRAUERT, H.,u.R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann.136, 245-318 (1958).

[14] GUNNING, R.C. and H. ROSSI: Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall 1965.

[15] HAYES, S.: Ein Heftungslemma für parameterabhängige Schnitte eines holomorphen Faserbündels über einem holomorph-vollständigen komplexen Raum mit einer komplexen Lieschen Gruppe als Faser. Diplomarbeit, München (1967).

[16] HIRZEBRUCH, F.: Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. der Math. 9, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.

[17] HOLMANN, H.: Vorlesung über Faserbündel. Münster (1965).

[18] NAGATA, M.: Local Rings. New York: Interscience 1962.

[19] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, III.Deuxième problème de Cousin.J.Sci.Hiroshima Univ. 9, 7-19 (1939).

[20] RAMSPOTT, K.J.: Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser. Math. Z. 89, 234-246 (1965).

[21] - Garbentheorie. Vorlesungsausarbeitung. München (1968).

[22] SERRE, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier 6, 1-42 (1955/56).

[23] STEENROD, N. The topology of fibre bundles. Princeton: University Press 1951.

LEBENSLAUF

Geburtsdatum: 16.12.1939; Geburtsort: Ware,Massachusetts,U.S.A.

Schulbildung: 1945-1957 Grammar- und High-School in Millbury, Massachusetts,U.S.A.; High School diploma 1957.

1957-61 Vassar College, Poughkeepsie, New York; Bachelor of Arts 1961 (Hauptfach Mathematik, Nebenfach Deutsch).

Universitätsbildung: 1961-68 Universität München (Wintersemester 64-65 Universität Bonn); Diplomhauptprüfung in Mathematik (Nebenfach Theoretische Physik) Februar 1968. Sommersemester 1968 Universität Münster.

Vorlesungen gehört bei: F. Bopp, P. Dombrowski, A. Faessler, O. Forster, M. Käsbauer, F. Kasch, H. Kellerer, H. Kerner, K. J. Ramspott, R. Remmert, H. Richter, A. Schlüter, J. Schmidt, W. Stegmüller, K. Stein.